DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXVI No 1 1993

Nguyen Cang, Nguyen Kim Tan

OPTIMISATION D'UNE CLASSE DE SYSTÈMES DISCRETS

1. Introduction

Dans [1] V.M. Popov a déjà étudié le problème suivant. Soit le système

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t)+b\mu(t), \; x(0)=x_0, \\ \eta(0,\infty) = \displaystyle\int_0^\infty (k\mu^2+2\mu l^*x+x^*Mx)\,dt. \end{cases}$$

Quelle valeur faut-il attribuer a $\mu(t)$ pour que $\eta(0,\infty)$ soit minimal?

Dans ce qui suit, considérons le système discret

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + b_k \mu_k, \; k=0,1,\ldots,N-1 & (1.a) \\ J(\mu) = x_N^* G x_N + \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k & (1.b) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} F_k & l_k \\ l_k^* & m_k \end{pmatrix}\begin{matrix} \}n \\ \}1 \end{matrix}, \quad s_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \mu_k \end{pmatrix}\begin{matrix} \}n \\ \}1 \end{matrix};$$

A_k, F_k, G étant des matrices constantes d'ordre n; b_k, l_k vecteurs constants à n dimensions; m_k scalaires positifs; x_k vecteurs a n dimensions qui décrivent l'état du système au moment k; μ_k et $J(\mu)$ sont, respectivement, fonction de contrôle au moment k et <u>fonction de coût</u> correspondante. Le signe * indique la transposition de la matrice ou du vecteur (les grandeurs qui entrent dans le système (1) sont supposées réelles).

Posons le problème suivant: ayant la valeur initiale x_0 quelconque, quelle valeur optimale faut-il attribuer a μ_k pour que la fonction de coût $J(\mu)$ soit minimale?

2. Quelques résultats obtenus

Définition. On dit que l'ensemble $(x,\mu,J(\mu))$ est une solution de (1) si

1^{o} le couple (x,μ) est une solution de l'équation (1.a) avec $x=(x_k)_{k=0}^{N-1}$ et $\mu=(\mu_k)_{k=0}^{N-1}$,

2^{o} $x,\mu,J(\mu)$ vérifient l'équation (1.b).

Considérons le système d'équations matricielles suivant

$$(2)\quad \begin{cases} X_{k+1}=(A_k-b_km_k^{-1}l_k^*)X_k - b_km_k^{-1}b_k^*\psi_{k+1}, \quad k=0,1,\dots,N-1 & (2.a)\\ \psi_k=(F_k-l_km_k^{-1}l_k^*)X_k + (A_k^*-l_km_k^{-1}b_k^*)\psi_{k+1} & (2.b)\\ \psi_N=GX_N & (2.c)\end{cases}$$

dans lequel, $X_1,X_2,\dots,X_N$ et $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_N$ sont des matrices carées inconnues.

Lemme 1. Si (x,μ) est une solution de (1.a) et $(\hat{X},\hat{\psi})$ est une solution de (2), alors avec

$$(3)\qquad \hat{\mu}_k = -m_k^{-1}\left(b_k^*\,\hat{\psi}_{k+1}+l_k^*\,\hat{X}_k\right),$$

$$(4)\qquad \hat{s}_k = \begin{pmatrix}\hat{X}_k\\ \hat{\mu}_k\end{pmatrix}$$

nous avons la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{N-1} s_k^*\mathcal{F}_k\hat{s}_k = x_0^*\hat{\psi}_0 - x_N^*G\hat{X}_N.$$

Démonstration. En remplacant X_k, ψ_k par $\hat{X}_k$, $\hat{\psi}_k$ dans l'équation (2.b) on a, d'après (3), (4),

$$F_k\hat{X}_k = \hat{\psi}_k + l_km_k^{-1}\left(l_k^*\hat{X}_k+b_k^*\hat{\psi}_{k+1}\right)-A_k^*\hat{\psi}_{k+1} = \hat{\psi}_k - l_k\hat{\mu}_k - A_k^*\hat{\psi}_{k+1}.$$

Ainsi nous avons, vu (1.a), (3), (4),

$$s_k^*\mathcal{F}_k\hat{s}_k = x_k^*F_k\hat{X}_k + x_k^*l_k\hat{\mu}_k + \mu_k^*l_k^*\hat{X}_k + \mu_k^*m_k\hat{\mu}_k =$$

$$= \left(x_k^*\hat{\psi}_k-x_k^*l_k\hat{\mu}_k-x_k^*A_k^*\hat{\psi}_{k+1}\right)+ x_k^*l_k\hat{\mu}_k+ \mu_k^*l_k^*\hat{X}_k+ \left(-\mu_k^*b_k^*\hat{\psi}_{k+1}- \mu_k^*l_k^*\hat{X}_k\right)=$$

$$= x_k^*\hat{\psi}_k - \left(x_k^*A_k^* + \mu_k^*b_k^*\right)\hat{\psi}_{k+1} = x_k^*\hat{\psi}_k - x_{k+1}^*\hat{\psi}_{k+1}.$$

Il s'ensuit, d'après (2.c),

$$\sum_{k=0}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k \hat{s}_k = x_0^* \hat{\psi}_0 - x_N^* \hat{\psi}_N = x_0^* \hat{\psi}_0 - x_N^* G \hat{X}_N,$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 2. Supposons que

1° $J(\mu)>0$ pour chaque solution de (1) avec $x_0=0$ et $\mu\neq 0$,

2° le système (2) a une solution avec X_N invertible.

Alors X_0 est invertible.

Démonstration. Soit (X,ψ) une solution de (2) dans laquelle

$$X = \{X_k\}_{k=0}^N, \quad \psi = \{\psi_k\}_{k=0}^N$$

et, en outre, X_N est supposé invertible. Pour chaque vecteur y nous prouvons sans difficulté que $(\hat{X},\hat{\psi})$ avec

$$\hat{X} = \{\hat{X}_k\}_{k=0}^N = \{X_k y\}_{k=0}^N, \quad \hat{\psi} = \{\hat{\psi}_k\}_{k=0}^N = \{\psi_k y\}_{k=0}^N$$

est aussi une solution de (2). Nous prouvons ensuite que $(\hat{X},\hat{\mu})$ est une solution de (1.a). En effet, selon (3), on trouve

$$\hat{X}_{k+1} = X_{k+1}y = (A_k - b_k m_k^{-1} l_k^*) X_k y - b_k m_k^{-1} b_k^* \psi_{k+1} y =$$

$$= A_k \hat{X}_k - b_k m_k^{-1}(l_k^* \hat{X}_k + b_k^* \hat{\psi}_{k+1}) = A_k \hat{X}_k + b_k \hat{\mu}_k.$$

D'après (1.b) et Lemme 1 nous avons $J(\hat{\mu}) = \hat{X}_N^* G \hat{X}_N + (\hat{X}_0^* \hat{\psi}_0 - \hat{X}_N^* G \hat{X}_N) = \hat{X}_0^* \hat{\psi}_0$, d'où

$$J(\hat{\mu}) = y^* X_0^* \psi_0 y. \tag{5}$$

Nous allons prouver, par contradiction, que X_0 est invertible: supposons que X_0 n'est pas invertible; alors il existe un vecteur y non nul tel que $y^* X_0^* = 0$. Ceci implique $\hat{X}_0 = X_0 y = (y^* X_0^*)^* = 0$ et $J(\hat{\mu}) = 0$. D'après l'hypothèse, nous devons avoir $\hat{\mu} \equiv 0$; alors l'équation (1.a) devient $\hat{X}_{k+1} = A_k \hat{X}_k$. Remarquons que $\hat{X}_N = 0$, parce que $\hat{X}_0 = 0$. Ceci implique $y = X_N^{-1} \hat{X}_N = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse que y est un vecteur non nul. Donc X_0 est invertible. Lemme 2 est donc prouvé.

Maintenant nous étudions le cas de x_0 arbitraire. Applicant les résultats obtenus ci-dessus dans lesquels $y = X_0^{-1} x_0$, nous affirmons que $(\hat{X}, \hat{\mu}, J(\hat{\mu}))$ est un optimum unique du système (1) avec condition initiale $\hat{X}_0 = X_0 y = X_0 X_0^{-1} x_0 = x_0$. Prouvons d'abord que $(\hat{X}, \hat{\mu}, J(\hat{\mu}))$ est un optimum de (1). Soit $(x, \mu, J(\mu))$ une autre solution quelconque de (1) avec la même condition initiale x_0. Posons $x'_k = x_k - \hat{X}_k$, $\mu'_k = \mu_k - \hat{\mu}_k$. Évidement $(x', \mu', J(\mu'))$ est aussi une solution de (1) avec la condition initiale $x'_0 = x_0 - X_0 = 0$. Selon (1.b), on a

$$J(\mu) = (x'_N + \hat{X}_N)^* G(x'_N + \hat{X}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} (s'_k + \hat{s}_k)^* \mathcal{F}_k (s'_k + \hat{s}_k) =$$

$$= J(\mu') + J(\hat{\mu}) + 2\mathrm{Re}[x_N^{*\prime} G\hat{x}_N + \sum_{k=0}^{N-1} s_k^{*\prime} \mathcal{F}_k \hat{s}_k].$$

Appliquons Lemme 1 et remarquons que $x'_0 = 0$. On obtient:

$$(6) \quad J(\mu) = 2\mathrm{Re}[x_N^{*\prime} G\hat{x}_N + x_0^{*\prime} \hat{\psi}_0 - x_N^{*\prime} G\hat{X}_N] + J(\mu') + J(\hat{\mu}) = J(\mu') + J(\hat{\mu}).$$

Or $x'_0 = 0$, si $\mu' \neq 0$, alors d'après l'hypothèse, $J(\mu') > 0$. En plus observons que, si $x' \equiv 0$, $\mu' \equiv 0$ et $J(\mu') = 0$, alors le système (1) est aussi vérifié. Ainsi $J(\mu') \geq 0$. D'où, d'après la relation (6), nous concluons que $J(\mu) \geq J(\hat{\mu})$. Donc $(\hat{X}, \hat{\mu}, J(\hat{\mu}))$ est un optimum de (1). Si $(x, \mu, J(\mu))$ est un autre optimum de (1), alors en basant sur la relation (6) nous devons avoir $J(\mu') = 0$; or $x'_0 \equiv 0$, d'où $\mu' \equiv 0$, donc $\mu = \hat{\mu}$. On en tire $x = \hat{X}$ et la valeur optimale de la fonction de coût est donnée par l'epression

$$(7) \qquad J(\hat{\mu}) = y^* X_0^* \psi_0 y = x_0^* \psi_0 X_0^{-1} x_0.$$

On a donc le théorème suivant.

Théorème 1. Supposons que

1° $J(\mu) > 0$ pour chaque solution de (1) avec $x_0 = 0$ et $\mu \neq 0$,

2° il existe une solution de (2) avec X_N invertible.

Alors, avec n'importe quelle donnée initiale x_0, il existe un contrôle optimal unique $\hat{\mu}_k$ défini par (3), (4) (Lemme 1) et une fonction de coût optimale correspondante (7).

Proposition 1. Si G est une matrice semi-définie-positive $(G \geq 0)$, F_k sont des matrices définies-positives $(F_k > 0)$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, et $(A_k - b_k m_k^{-1} l_k^*)$ des matrices invertibles, alors, le système (1) possède un contrôle optimal unique.

Démonstration. Soit X_N une matrice invertible quelconque

(X_N peut être une matrice unité E) et soit ψ_N matrice définie d'après (2.c). Supposons que les matrices ψ_{k+1}, X_{k+1} soient définies. Alors X_k est définie, d'après (2.a), parce que $(A_k-b_k m_k^{-1} l_k^*)$ est invertible; ψ_k est définie, d'après (2.b). Enfin, par induction, on déduit que le système (2) a une solution. Si $\mu\neq 0$, il existe un tel k que $\mu_k\neq 0$, ceci implique

$$s_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \mu_k \end{pmatrix} \neq 0.$$

Or, d'après l'hypothèse, $G\geq 0$, $F_k>0$; d'où $\mathcal{F}_k>0$ (voir le système (1)). On arrive à l'inégalité

$$J(\mu) = x_N^* G x_N + \sum_{k=0}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k > 0.$$

D'après le Théorème 1, le système (1) possède un contrôle optimal unique. C.Q.F.D.

Maintenant nous pouvons omettre le système (2) et l'invertibilité de la matrice $(A_k-b_k m_k^{-1} l_k^*)$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Considérons le système

$$(8)\quad \begin{cases} P_k = A_k^* P_{k+1} A_k + F_k - (A_k^* P_{k+1} b_k + l_k) r_k^{-1} (b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*), & (8.a) \\ r_k E = (b_k^* P_{k+1} b_k + m_k) E, & (8.b) \\ P_N = G & (8.c) \end{cases}$$

dans lequel $P_1, P_2, \ldots, P_N$ sont des matrices hermitiennes[1)] inconnues, $r_1, r_2, \ldots, r_{N-1}$ sont des scalaires inconnus. Fixons $j\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ et supposons que $\{(x_k)_{k=j}^N, (\mu_k)_{k=j}^N\}$ est une solution de (1.a). Posons

$$v_k = -r_k^{-1} (b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*) x_k.$$

Nous avons, vu (3.a), (3.b),

$$\begin{aligned}
&(\mu_k - v_k)^* r_k (\mu_k - v_k) = \\
&= [\mu_k + r_k^{-1}(b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*) x_k]^* r_k [\mu_k + r_k^{-1}(b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*) x_k] = \\
&= \mu_k^* r_k \mu_k + x_k^* l_k \mu_k + x_k^* A_k^* P_{k+1} b_k \mu_k + \mu_k^* b_k^* P_{k+1} A_k x_k + \\
&+ x_k^* (l_k + A_k^* P_{k+1} b_k) r_k^{-1} (b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*) x_k = \\
&= \mu_k^* m_k \mu_k + \mu_k^* b_k^* P_{k+1} b_k \mu_k + x_k^* A_k^* P_{k+1} b_k \mu_k + x_k^* l_k \mu_k +
\end{aligned}$$

---

1) $P_l = P_l^*$, $l=1,\ldots,N$; le signe * veut dire "transposer et conjuguer".

$$+ \mu_k^* b_k^* P_{k+1} A_k x_k + \mu_k^* l_k^* x_k + x_k^* (A_k^* P_{k+1} A_k + F_k - P_k) x_k$$

et, ensuite, vu (1.a),

$$(\mu_k - v_k)^* r_k (\mu_k - v_k) = s_k^* \mathcal{F}_k s_k + \mu_k^* b_k^* P_{k+1} b_k \mu_k + x_k^* A_k^* P_{k+1} b_k \mu_k +$$

$$+ \mu_k^* b_k^* P_{k+1} A_k x_k + x_k^* A_k^* P_{k+1} A_k x_k - x_k^* P_k x_k =$$

$$= s_k^* \mathcal{F}_k s_k + x_{k+1}^* P_{k+1} x_{k+1} - x_k^* P_k x_k .$$

Ceci implique

$$\sum_{k=j}^{N-1} (\mu_k - v_k)^* r_k (\mu_k - v_k) = \sum_{k=j}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k + x_N^* P_N x_N - x_j^* P_j x_j =$$

$$= \sum_{k=j}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k + x_N^* G x_N - x_j^* P_j x_j .$$

Enfin nous avons

$$x_j^* P_j x_j + \sum_{k=j}^{N-1} (\mu_k - v_k)^* r_k (\mu_k - v_k) = x_N^* G x_N + \sum_{k=j}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k . \tag{9}$$

Lemme 3. Si $G \geq 0$, $\mathcal{F}_k \geq 0$ et m_k sont des scalaires positifs, alors il existe une solution (P,r) du système (8) avec r_k positifs, $k=0,1,\dots,N-1$.

Démonstration (par l'induction). En premier lieu nous avons $P_N = G \geq 0$, d'où

$$r_{N-1} = m_{N-1} + b_{N-1}^* G b_{N-1} > 0 .$$

Supposons que $P_k \geq 0$, $k=j+1,\dots,N$, et $r_k > 0$, $k=j,\dots,N-1$. Alors, d'après (8.a), P_j est définie. Or, cette matrice est hermitienne, donc $P_j \geq 0$. En effet, pour x_j quelconque, par l'induction, nous posons

$$\begin{cases} v_k = -r_k^{-1} (b_k^* P_{k+1} A_k + l_k^*) x_k , \\ x_{k+1} = A_k x_k + b_k v_k . \end{cases} \tag{10}$$

Alors $\{(x_k)_{k=j}^N, (v_k)_{k=j}^N\}$ vérifient l'équation (1.a). D'après (9), en remarquant $\mu_k = v_k$, $G \geq 0$, et $\mathcal{F}_k \geq 0$, nous avons

$$x_j^* P_j x_j = x_N^* G x_N + \sum_{k=j}^{N-1} s_k^* \mathcal{F}_k s_k \geq 0 .$$

Ceci prouve que P_j sont des matrices semi-définies-positives, parce que x_j sont arbitraires. D'après (3.b), nous avons évidemment

$$r_{j-1} = m_j + b_{j-1}^{*} P_j b_{j-1} > 0.$$

Enfin, par l'induction, le Lemme 3 est prouvé.

Théorème 2. Si $G \geq 0$, $\mathcal{F}_k \geq 0$ et m_k sont des scalaires positifs, $k=0,1,\ldots,N-1$, alors, avec n'importe quelle condition initiale x_0, il existe un contrôle optimal unique ayant la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} \hat{\mu}_k = -r_k^{-1}(b_k^{*} P_{k+1} A_k + l_k^{*})\hat{x}_k, \\ \hat{x}_0 = x_0 \end{cases}$$

et $J(\hat{\mu}) = x_0^{*} P_0 x_0$ est une valeur optimale correspondante.

Démonstration. Soit $(x,\mu,J(\mu))$ une solution de (1) avec la condition initiale x_0. D'après (9), nous avons la relation

$$(12) \qquad J(\mu) = x_0^{*} P_0 x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (\mu_k - v_k)^{*} r_k (\mu_k - v_k)$$

dans laquelle v_k sont définis par (10). D'après le Lemme 3, $r_k > 0$, $k=1,\ldots,N-1$. Ceci implique $J(\mu) \geq x_0^{*} P_0 x_0$. En plus, $(\hat{x},\hat{\mu})$ étant défini par (11) est une solution de (1.a) et $\hat{x} = x_0$. Basons-nous sur la relation (9) et remarquons que $v_k = \hat{\mu}_k$; alors nous avons $J(\hat{\mu}) = \hat{x}_0^{*} P_0 \hat{x}_0 = x_0^{*} P_0 x_0$, ce qui conduit à l'inégalité $J(\mu) \geq J(\hat{\mu})$. Donc $(\hat{x},\hat{\mu},J(\hat{\mu}))$ est un optimum. Supposons que $(x,\mu,J(\mu))$ est un autre optimum; ceci implique $J(\mu) = x_0^{*} P_0 x_0$. En tenant compte de la relation (11) et du Lemme 3 ($r_k > 0$; $k=0,1,\ldots N-1$), nous avons $\mu_k = v_k$, $k=0,1,\ldots,N-1$. Pour prouver que l'optimum est unique il faut démontrer par l'induction que $\hat{\mu} = \mu$ et $\hat{x} = x$. En premier lieu nous avons $x_0 = \hat{x}_0$ et $\mu_0 = v_0 = -r_0^{-1}(b_0^{*} P_1 A_0 + l_0^{*}) x_0 = -r_0^{-1}(b_0^{*} P_1 A_0 + l_0^{*}) \hat{x}_0 = \hat{\mu}_0$. Ensuite, supposons que $x_k = \hat{x}_k$ et $\mu_k = \hat{\mu}_k$, $k=0,1,\ldots,j$. Nous allons prouver que $x_{j+1} = \hat{x}_{j+1}$ et $\mu_{j+1} = \hat{\mu}_{j+1}$. En effet $x_{j+1} = A_j x_j + b_j \mu_j = A_j \hat{x}_j + b_j \hat{\mu}_j =$

$=\hat{x}_{j+1}$ et $\mu_{j+1}=v_{j+1}=-r_j^{-1}(b^*_{j+1}P_{j+2}A_{j+1}+l^*_{j+1})\hat{x}_{j+1}=\hat{\mu}_{j+1}$.

Il s'ensuit que $x=\hat{x}$ et $\mu=\hat{\mu}$. Le théorème est donc prouvé.

RÉFÉRENCES

[1] **V.M. Popov**: L'hyperstabilité des systèmes automatiques. Dunod, Paris 1973.

[2] **A. Halanay**: Séminaire "Control Theory" Bucarest, 1981. Communications privées 1982.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ d'HO CHI MINH VILLE
227 NGUYEN VAN CU, Q.5, HO CHI MINH VILLE, VIET NAM.

Received December 7, 1990.