DEMONSTRATIO MATHEMATICA
Vol. XXVI No 1 1993

Alphonse Mba, Jean Wouafo Kamga

PROLONGEMENT TANGENT DE FEUILLETAGES

Le prolongement tangent d'un feuilletage était utilisé par plusieurs auteurs, voir [4], [1]. Ces feuilletages sont de grande importance dans des théories physiques. Alors nous voulons donner une courte présentation catégorique des relèvements tangents des feuilletages et quelques propriétés géometriques des ces feuilletages relevés.

Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur une variété différentiable V de dimension $n > q$ est donné par un cocycle $\{U_i, f_i, g_{ij}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, c'est-à-dire, (cf. [3], [7], [8])

(i) $\{U_i\}$ est un recouvrement par des ensembles ouverts des V,

(ii) $f_i\colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^q$ est une submersion aux fibres connexes,

(iii) g_{ij} sont des diffeomorphismes locaux de $\mathbb{R}^q$ et $f_i = g_{ij}f_j$ sur $U_i \cap U_j$.

Théorème 1. Soit V une variété avec un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p et codimension q. Sur le fibré TV il existe un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ dont la dimension est 2p et codimension 2q. La projection canonique $TV \longrightarrow V$ envoie feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$ dans des feuilles de $\mathcal{F}$. La correspondance qui à $(V,\mathcal{F})$ associe $(TV,\hat{\mathcal{F}})$ est un foncteur covariant dans la catégorie des variétés feuilletées.

Preuve. Si $\{U_i, f_i, g_{ij}\}$ est un cocycle définissant $\mathcal{F}$ et modelé sur $\mathbb{R}^q$, alors $\{TU_i, Tf_i, Tg_{ij}\}$ est un cocycle modelé sur $T\mathbb{R}^q$ définissant un feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ sur TV de dimension 2p et codimension 2q. Comme $\ker Tf_i = T\mathcal{F}|U_i$, les sousvariétés TL, où L est une feuille de $\mathcal{F}$, sont des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$.

Soit $(V,\mathcal{F})$ et $(V',\mathcal{F}')$ deux variétés feuilletées. Une application f envoie des feuilles de $\mathcal{F}$ dans des feuilles de $\mathcal{F}'$ si et seulement si des applications $h_i f : f^{-1}(V_i) \longrightarrow \mathbb{R}^{q'}$ sont constantes sur les feuilles de $\mathcal{F}$, où $\{V_i, h_i, k_{ij}\}$ est un cocycle définnissant le feuilletage $\mathcal{F}'$. Alors les applications $Th_i Tf$ sont constantes sur des feuilles de $\hat{\mathcal{F}}$.

La condition que l'application f est transverse à $\mathcal{F}'$ et $f^{-1}\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ se réduit au fait que les applications $h_i f$ sont des submersions. Alors les applications $Th_i Tf$ sont des submersions aussi et alors Tf est une morphisme entre $(TV, \hat{\mathcal{F}})$ et $(TV', \hat{\mathcal{F}}')$.□

Soit $v(\mathcal{F})$ le fibré normal de la $(M, \mathcal{F})$ et $E(\mathcal{F})$ le fibré des repères transverses. Le $E(\mathcal{F})$ admet un feuilletage $\mathcal{F}_t$ de dimension p et codimension $q^2 + q$, voir [4], [5], [7], [8]. Alors si f est une application $f : V' \longrightarrow V$ transverse au $\mathcal{F}$, l'application f_t induite au niveau E() est transverse au feuilletage $\mathcal{F}_t$ et

$$(f_t)^{-1}(\mathcal{F}_t) = (f^{-1}(\mathcal{F})_t). \tag{1}$$

Le Théorème 1 et (1) nous donnent le résultat suivant.

Théorème 2. Soit f une application $f : V' \longrightarrow V$ transverse au $\mathcal{F}$. Alors le feuilletage $\widehat{(f_t)^{-1}}(\mathcal{F}_t)$ de $TE(f^{-1}(\mathcal{F}))$ est égal au feuilletage $(Tf_t)^{-1}\hat{\mathcal{F}}_t$ et le feuilletage $(Tf)_t^{-1}(\hat{\mathcal{F}})_t$ du $E(\widehat{f^{-1}}\mathcal{F})$ est égal au $(\widehat{f^{-1}}(\mathcal{F}))_t$.

Soit $GL(n,\mathbb{R})$ le groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^n$. En identifiant $TGL(n,\mathbb{R})$ au produit semi-direct $GL(n,\mathbb{R}) \times T_e GL(n,\mathbb{R})$, où e est l'élément neutre du groupe $GL(n,\mathbb{R})$, l'application j_n de $TGL(n,\mathbb{R})$ dans $GL(2n,\mathbb{R})$ est une injection et, si G est un sous-groupe de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$, alors $j_n(TG)$ est un sous-groupe de Lie de $GL(2n,\mathbb{R})$, appelé prolongement tangent de G(cf. [6]).

Soit φ une forme bilinéaire antisymétrique et non-dégénérée de $\mathbb{R}^{2q}$, soit J la matrice de φ dans une base de $\mathbb{R}^{2q}$. Alors $\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une forme bilinéaire antisymétrique et non-dégénérée $\hat{\varphi}$ de $\mathbb{R}^{4q}$ dans une base de $\mathbb{R}^{4q}$ qu'on identifiera à $T\mathbb{R}^{2q}$. Soit $G = O_\varphi(2q,\mathbb{R})$ l'ensemble des $g \in GL(2q,\mathbb{R})$ tels que $gJ^t g = J$. Alors $O_\varphi(2q,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie de

$GL(2q,\mathbb{R})$.

Proposition 1. (cf. [6]) Le prolongement tangent de $O_\varphi(2q,\mathbb{R})$ est inclu dans $O_{\hat{\varphi}}(4q,\mathbb{R})$.

Théorème 3. Soit $n = 2q$. Si V admet une $O_\varphi(2q,\mathbb{R})$-structure, alors TV admet une $O_{\hat{\varphi}}(4q,\mathbb{R})$-structure.

Nous appliquons les théorèmes précédents aux feuilletages transversalement sympletiques (cf. [3], [2]).

Théorème 4. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement symplectique de V, alors $\hat{\mathcal{F}}$ est un feuilletage transversalement sympletique de TV.

Preuve. Il existe une base de $\mathbb{R}^{2q}$ dans laquelle la matrice de φ est $J = \begin{pmatrix} 0 & I_q \\ -I_q & 0 \end{pmatrix}$, où I_q est la matrice identité d'ordre q. Si $\mathcal{F}$ est transversalement symplectique, alors pour tous g_{ij} de matrice jacobienne (A_{kl}) on a $(A_{kl})J^t(A_{kl}) = J$. Donc, $\hat{\mathcal{F}}$ étant défini par le cocycle $\{TU_i, Tf_i, Tg_{ij}\}$ est transversalement sympletique pour $\hat{J}$. □

Utilisant des définitions des fibrés avec les jets (cf. [7]) on peut définir l'application $j_q : TE(\mathcal{F})) \longrightarrow E(\hat{\mathcal{F}})$. Un élément de $TE(\mathcal{F})$ peut être représenté par $j_0^1(j_0^{1t}\varphi_s)$, où pour tous $s \in \mathbb{R}$ l'application $\varphi_s : \mathbb{R}^q \longrightarrow V$ est transverse au $\mathcal{F}$. Mais $j_0^1(j_0^{1t}\varphi_s) = j_0^1(j_0^{1t}\varphi(s,x))$ et la correspondance $j_0^1(j_0^{1t}\varphi(s,x)) \mapsto j_0^{1t}(j_0^1\varphi(s,x)) = j_0^{1t}((T_0\varphi)_x)$ envoie $T(E(\mathcal{F}))$ dans un sous-fibré de $E(\hat{\mathcal{F}})$ noté $j_V(TE(\mathcal{F}))$.

Théoréme 5. $j_V(TE(\mathcal{F}))$ est une $j_q(TGL(q,\mathbb{R}))$-structure transverse au feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$.

Preuve. Soit π_2 la projection canonique de $E(\mathcal{F})$ sur V et π_2' celle de $E(\hat{\mathcal{F}})$ sur TV; on a $\pi_2'(j_V(z)) = T\pi_2(z)$ pour tout $z \in TE(\mathcal{F})$. En plus $(Tf_i)_t j_V = j(f_i)_t$, où $j : TE(\mathbb{R}^q) \longrightarrow ET\mathbb{R}^q$ est l'application naturelle. Ainsi $j_V(TE(\mathcal{F}))$ est une $j_q(TGL(q,\mathbb{R}))$-structure transverse au feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$. □

Corollaire 1. Le prolongement tangent d'une G-structure transverse à $\mathcal{F}$ est une $j_q(TG)$-structure transverse à $\hat{\mathcal{F}}$.

Théorème 6. Le prolongement tangent de $\mathcal{F}$ sur TV est transversalement orientable.

Preuve. Le fibré $E(\hat{\mathcal{F}})$ admet un sous-fibré feuilleté de groupe structural $j_q(TGL(q,\mathbb{R}))$. Or $\forall(a,b) \in TGL(q,\mathbb{R})$ on a $j_q(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ ba & a \end{pmatrix}$, donc $j_q(TGL(q,\mathbb{R})) \in GL^+(2q,\mathbb{R})$, où $GL^+(2q,\mathbb{R})$ est l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{R}^{2q}$ conservant l'orientation.

Corollaire 2. Le prolongement tangent de $\mathcal{F}$ sur TV est toujours orientable.

Preuve. TV étant orientable, il suffit d'appliquer Théorème 6.

REFERENCES

[1] **L.A. Cordero:** The extension of G-structures to tangent bundles of higher order, Nagoya Math. J. 56 (1974) 29-44.

[2] **L.A. Cordero, R. Wolak:** Examples of foliations with foliated geometric structures, Pacific J. Math. 142 (1990) 265-276.

[3] **C. Godbillon:** Feuilletages. Strasbourg 1986.

[4] **P. Molino:** Connexion et G-structures sur les variétés feuilletées, Bull. Sci. Math. 92 (1968) 59-63.

[5] **P. Molino:** Riemannian foliations. Boston 1988.

[6] **A. Morimoto:** Prolongations of G-structures to tangent bundles, Nagoya Math. J. 32 (1968) 67-108.

[7] **R. Wolak:** On transverse structures of foliations, Rend. Cir. Mat. Palermo 9 (1985) 227-243.

[8] **R. Wolak:** Foliated and associated geometric structures on foliated manifolds, Ann. Fac. Sci. Toulouse 10 (1989) 337-360.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES,
B.P. 812 YAOUNDE, CAMEROUN

Received June 11, 1991.