Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

Sorgfältig hatte Gerhard alle Aussagen in ihre Bestandteile zerlegt und alle Informationen neu zusammengesetzt. Was herauskam, stellte die Wahrheit dar. Dann jedenfalls, wenn man aufgeklärt genug war, um *Wahrheit* als den Fall mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu betrachten.

Aus: Juli Zeh, *Unterleuten*, Kapitel 54

Postfaktisches

In Juli Zehs 2016 erschienenem Gesellschaftsroman gibt es keinen allwissenden Erzähler, stattdessen ist jedes der 62 Romankapitel aus der Sicht einer der zwölf Hauptpersonen verfasst. Das wäre als Stilmittel weder neu noch besonders originell, aber: Auch die reinen Fakten der Romanhandlung stellen sich bei jedem Erzähler ganz anders dar und der Leser erfährt bis zum Schluss nicht, wie es denn nun wirklich gewesen ist in der Gewitternacht vor zwanzig Jahren.

Die *Gesellschaft für deutsche Sprache* hat „postfaktisch“ zum Wort des Jahres 2016 gewählt, und das *Oxford English Dictionary* „post-truth“ zum International Word of the Year.

Post-truth, when seen this way, doesn't necessarily point to bleakness but rather suggests that we may be on the edge of completely overturning our sensibilities on what constitutes "objectivity" or "knowledge". It is now argued that algorithms have, instead of making the world a connected entity, ended up erecting echo chambers that slot us into hermetic opinion bubbles.¹

Physiker kennen diese Idee seit langem. Die (sehr umstrittene) Viele-Welten-Interpretation der Quantenmechanik besagt, dass alle möglichen Vergangenheiten wie Zukünfte real sind und jede eine tatsächliche Welt oder ein Universum repräsentiert. Die Hypothese beinhaltet eine riesige oder unendliche Anzahl an Universen, und alles was in unserer Vergangenheit hätte geschehen können, geschah in der Vergangenheit einiger anderer Universen.²

Was ist das mathematische Analogon zur Viele-Welten-Theorie? Glaubt man dem Oktoberheft des *Bulletin of the American Mathematical Society*³, dann ist eine von vielen mathematischen Welten die, die man durch Verzicht auf das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten erhält.

We initially set out to understand the difference between the classical and the constructive world of mathematics, only to have discovered that there are not two but many worlds, some of which simply cannot be discounted as logicians' contrivances.

Ich muss zugeben, dass mir die Vorteile der mathematischen Multiversen auch nach Lektüre des Bulletin-

Artikels nicht klargeworden sind. Sicher ist es oft nützlich, ein mathematisches Objekt konstruieren und nicht nur seine Existenz beweisen zu können. Im Bulletin wird aber eher versucht, die Gleichwertigkeit der nicht-konstruktiven Mathematik dadurch zu belegen, dass sich Sätze der nicht-konstruktiven Mathematik durch einfache Umformulierungen in konstruktiv beweisbare Sätze verwandeln ließen. So funktionierte der Beweis des Zwischenwertsatzes in der konstruktiven Mathematik nicht, seine Umformulierung „Wenn f stetig ist und für jedes x entweder $f(x) > 0$ oder $f(x) < 0$ gilt, dann ist f entweder überall positiv oder überall negativ“ aber sei auch

ohne das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten beweisbar.

Das ist sicher richtig, erklärt aber doch nicht wirklich den Nutzen konstruktiver Mathematik und erinnert ein wenig an die Argumentation der Brexit-Befürworter, dass England ja schließlich auch ohne Binnenmarkt ein Freihandelsabkommen schließen könne.

1. Jacob Koshy: “Should ‘post-truth’ depress us?”, The Hindu, 20. November 2016.
2. Zitiert aus dem Wikipedia-Artikel „Viele-Welten-Interpretation“.
3. Andrej Bauer: “Five stages of accepting constructive mathematics”, BAMS 10/2016

Was ist ein Anagramm von Banach–Tarski?

In einer Welt ohne Auswahlaxiom und ausgeschlossenes Drittes könnte jede Menge messbar sein. Insbesondere gäbe es das Banach–Tarski-Paradox nicht, welches besagt, dass man eine Kugel in Stücke zerlegen und aus diesen anders zusammengesetzt zwei Kugeln derselben Größe bauen kann – denn das geht natürlich nur, wenn die Stücke nicht-messbare Mengen sind, sonst hätte man ihr Volumen verdoppelt.

Das Banach–Tarski-Paradox war ursprünglich 1914 von Felix Hausdorff entdeckt worden, der damit das Auswahlaxiom widerlegen wollte. Sein 102. Jahrestag gab den Anlass zur Gauß-Vorlesung „Hundert Jahre Zweisamkeit“ Ende Mai in Dresden, in deren Folge dann noch ein sehr hörenswerter und allgemein verständlicher Podcast eines Interviews von Gudrun Thäter mit dem Vortragenden Nicolas Monod produziert wurde.¹

Auch auf der Frage- und Antwortseite *mathoverflow.net* gibt es in unregelmäßigen Abständen immer wieder Kontroversen über das Auswahlaxiom, die nicht-messbaren Mengen und die physikalische Realität, zum Beispiel *Why worry about the axiom of choice?*², *Non-Borel sets without axiom of choice*³, *Physical meaning of the Lebesgue measure*⁴, *Axiom of choice, Banach–Tarski and reality*⁵.

Die Sichtweisen sind dabei ungefähr so vielfältig wie in Juli Zehs Roman.

Warum sollte man mittels Auswahlaxiom für die Kate-

gorie der Mengen postulieren, dass jeder Epimorphismus spaltet, wenn dies in vielen anderen Kategorien doch nun einmal nicht der Fall ist? Und warum sollte man durch das Auswahlaxiom eine Ähnlichkeit zwischen endlichen und unendlichen Mengen postulieren, für die es keinen objektiven Grund gibt? Oder pragmatischer: Die meisten Anwendungen des Lebesgue-Maßes benötigten nicht die σ -Algebra der messbaren Mengen, sondern nur die der messbaren Mengen modulo Nullmengen – diese ist aber separabel und ließe sich also durch abzählbare Konstruktionen physikalisch interpretieren.

Wenn andererseits das Auswahlaxiom nicht gälte und man also Modelle der Mengenlehre hätte, in denen alle Mengen messbar wären, dann könnte man 2^ω in mehr als 2^ω disjunkte Teilmengen zerlegen, also eine Menge in mehr Teilmengen zerlegen, als sie Elemente hat, was doch viel unintuitiver ist als das Banach–Tarski-Paradox.

Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu solch offensichtlich wahren Aussagen wie „das kartesische Produkt einer nicht-leeren Familie nicht-leerer Mengen ist nicht leer“. Was aber auch als Argument dagegen verwendet wird, denn warum sollten unendliche Produkte nicht-leer sein? Oder nicht-messbare Mengen kämen in der Wirklichkeit durchaus vor, beispielsweise die Menge der differenzierbaren Funktionen als Teilmenge des Raums der stetigen Funktionen.

Fotos: Christoph Eyrich

Und es gibt die pragmatischen Argumente. Damit das Lebesgue-Maß seine üblichen Eigenschaften hat, darf $\mathbf{R}$ nicht die abzählbare Vereinigung abzählbarer Teilmengen sein, und dafür braucht man das Auswahlaxiom. Und die Eigenschaften des Lebesgue-Maßes wiederum braucht man in der Physik für Boltzmanns Stoßzahlansatz oder für die Konstruktion des SRB-Maßes auf Attraktoren chaotischer Systeme. Man braucht das Auswahlaxiom auch, um die Definition der Stetigkeit $\epsilon - \delta$ durch die Definition $\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(x)$ zu ersetzen. Nicht zu reden von den vielen Anwendungen in Funktionalanalysis und Quantenmechanik, angefangen mit dem Spektralsatz. Andererseits benötigt man in vollständigen Hilberträumen für den Beweis des Spektralsatzes gar nicht das Auswahlaxiom, sondern nur das beschränkte Auswahlaxiom ... Keine Eini-gung in Sicht.

Die meisten Upvotes von mathoverflow-Lesern erhält Andrej Bauer für die These, das Banach–Tarski-Paradox

sei weniger ein Problem des Auswahlaxioms als der falschen Raumdefinition: Statt mit topologischen Räumen solle man besser mit „Lokalen“⁶ arbeiten. Die geringste Zahl von Upvotes bekommt der Hinweis von „bof“, dass physikalische Konsequenzen des Banach–Tarski-Paradoxons bereits 1949 in Henry Kuttners Erzählung „Die Zeitachse“ beschrieben worden seien.

1. Der Podcast ist Teil der wöchentlich in Karlsruhe erscheinenden Podcastreihe „Modellansatz Podcast“ (www.math.kit.edu/ianm4/seite/modellansatz/de), die viele interessante Themen von mathematischer Modellbildung bis Juliamengen behandelt.
2. <http://mathoverflow.net/questions/22927/why-worry-about-the-axiom-of-choice>
3. <http://mathoverflow.net/questions/32720/non-borel-sets-without-axiom-of-choice>
4. <http://mathoverflow.net/questions/238153/physical-meaning-of-the-lebesgue-measure>
5. <http://mathoverflow.net/questions/260057/axiom-of-choice-banach-tarski-and-reality>
6. <https://ncatlab.org/nlab/show/locale>

Alternative Fakten und die Riemann-Vermutung

Unbekannt sind die Urheber eines seit dem 22. Januar im Netz kursierenden Beweises der Riemann-Vermutung aufbauend auf der Theorie der alternativen Fakten.¹

Die Idee hinter der Theorie der alternativen Fakten ist, kurz gefasst, dass der Wahrheitswert einer Proposition nicht nur von der Proposition selbst, sondern auch von Kontext und Motiv abhängt.

Im Fall der Riemann-Vermutung war der verwendete Kontext, dass die Zeta-Funktion in der Halbebene

$\operatorname{Re}(z) > 0$ mit $\theta(z) = z - \frac{1}{2}$ übereinstimme (und außerhalb durch analytische Fortsetzung definiert sei) und das Motiv war der Wunsch, die Riemann-Vermutung zu beweisen. In diesem Kontext und mit diesem Motiv reduziert sich der Beweis dann auf eine einfache Nullstellenberechnung.²

Der Autor betont, dass sein Beweis nicht ausschließe, dass es andere Kontexte und Motive gebe, unter denen die Vermutung falsch sei: *We leave as an open problem the*

question of whether such a context exists and whether it is huge.

Der Beweis sei aber jedenfalls konstruktiv, er liefere expliziten Kontext und ein Motiv, bei denen die Vermutung zutreffe.

1. <https://de.scribd.com/document/337471737/Proof-of-the-Riemann-Hypothesis-utilizing-the-theory-of-Alternative-Facts>
2. Die Existenz von Nullstellen in $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ kann man wohl deshalb ausschließen, weil die analytische Fortsetzung dort ebenfalls mit $\theta(z) = z - \frac{1}{2}$ übereinstimmt.

Arithmetische Politik

Diskussionen über Wahrheit, Mathematik und Politik gibt es nicht erst seit Johnson und Trump. Die *Neue Züricher Zeitung* erinnert in dem Beitrag *Die Erklärung eines Schimpfworts* vom 9. Dezember an einen Eintrag im 1751 erschienenen ersten Band der *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*.

Diderot hat auch einen Enzyklopädie-Artikel mit dem Titel ‚Arithmetische Politik‘ verfasst, in dem er der Frage nachgeht, welchen Stellenwert Berechnungen für unsere Staatswesen besitzen und was sie über Arbeitsverhältnisse, Ernteprognosen, den Zahlungsverkehr, Handelsvolumen und die Durchschnittshäufigkeit von Schiffbrüchen aussagen. Von manchen Ministern, schreibt er, sei bekannt, dass sie sich auf ihr eigenes Genie verließen und es nicht für nötig hielten, sich um Daten und Zahlen zu kümmern.

Diderot hält das nicht für sonderlich klug, räumt zugleich aber ein, es existiere zu jeder Berechnung eine Gegenberechnung. Der Veranschaulichung

halber rekurriert er auf eine Auseinandersetzung, in der ein französischer Arithmetiker einem englischen vorwirft, dass dessen Ergebnisse erstaunlich vorteilhaft für England ausfallen, was nicht wundernehme, wenn man wisse, dass sie für den englischen König angefertigt worden seien.

Aber auch wenn alles stimmen würde, fügt Diderot hinzu, müsse das nichts bedeuten, zumal jeden Tag eine Revolution ausbrechen könne. Am Ende des Artikels verweist er auf die weiterführenden Stichwörter Zufall, Spiel, Kombinatorik, Tod, Geburt und Leben.

„Arithmetische Politik“ ist eine schöne Wortschöpfung, die an Arithmetische Geometrie oder Arithmetische Zahlentheorie denken lässt, leider aber nur ein Übersetzungsfehler ist, denn im Original heißt das Stichwort „Arithmétique politique“, also politische Arithmetik.

Das ist doch keine Mathematik!

Früher einmal sollen Prominente oft mit der Aussage „In Mathe war ich immer schlecht“ kokettiert haben. Später vermittelten Banken und Politik gerne den Eindruck, ihre Maßnahmen seien das Ergebnis mathematischer Berechnungen und deshalb alternativlos. Neuerdings, in der postfaktischen Ära, möchte man trotz naturwissenschaftlicher Ausbildung nicht gar so schrecklich objektiv und rational wirken.

SPIEGEL: Alles, was Sie bisher gesagt haben, ist extrem rational. Sie adressieren allein den Verstand. Die Populisten setzen woanders an: Ihre Methode ist emotional. Wie wollen Sie die Menschen erreichen, wenn Sie ihre Gefühle nicht ansprechen?

Von der Leyen: Bei mir ist nichts rein rational bei

diesem Gespräch. Da unterstellt man dem Argument, es wäre nur Kopf und nicht Herz. Das ist doch keine Mathematik, die ich hier hinlege, sondern meine subjektive Überzeugung. Mich treibt die Frage um, ob wir den Artikel 1 des Grundgesetzes wirklich leben wollen. [...]

(Ursula von der Leyen im SPIEGEL-Interview „Der Populismus ist unsere Chance“ in Heft 48/2016)

„Das ist doch keine Mathematik“ gefolgt vom Verweis auf die Nummer eines Grundgesetzartikels. Die verdrängte Mathematik kommt im folgenden Satz doch wieder zum Vorschein. Sigmund Freud hätte seine Freude daran gehabt.