Logbuch Mathematik

Thilo Kuessner

Alles, was der Mensch erfährt, ist nur die Anschauung seines Wachstums.

Johann Wilhelm Ritter, *Fragmente aus dem Nachlass eines jungen Physikers*, 1810

Grenzen des Wachstums

Die *Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung* hatte vor einigen Jahren einmal aus Anlass des „e-Tages“ (7. 2.) eine ganze, eng beschriebene Doppelseite „Die steile Zahl“ mit allen denkbaren Informationen und Anwendungen der Eulerschen Konstante e gewidmet. (Eine legale Kopie findet man auf tinyurl.com/yb6loxzb.)

Neben Anwendungen wie der barometrischen Höhenformel, dem Weber-Fechner-Gesetz zur subjektiven Stärke von Sinneseindrücken, dem Gateway Arch in St. Louis und natürlich dem Zinseszins, und neben allseits Bekanntem über Wachstum und Verfall, der logarithmischen Spirale, der Kettenlinie, der Eulerschen Identität oder der Kettenbruchentwicklung der Eulerschen Zahl konnte auch der Mathematiker aus dem Artikel noch etwas Neues lernen: es gibt neben Addition, Multiplikation und Potenz noch eine vierte Verknüpfung, die Tetration ${}^b a := a^{a^{a^{\dots}}}$, wobei $(b-1)$ -mal potenziert und der Turm von oben nach unten abgearbeitet wird.

Wenn man diese Verknüpfung unendlich oft wiederholt, erhält man die Funktion

$$x^{x^{x^{\dots}}}$$

So wie man es von Addition und Multiplikation kennt, würde man auch hier erwarten, dass die für $x > 1$ gegen Unendlich geht. Erstaunlicherweise ist das nicht der Fall. Für alle x im Intervall $e^{-e} < x < e^{\frac{1}{e}}$ nimmt die Funktion einen endlichen Wert an.

Exponentielles Wachstum I

Manches Mal, wenn in Medien von exponentiellem Wachstum die Rede ist, sind die zugrundeliegenden Berechnungen kaum nachvollziehbar. So wie in einem Artikel

über die Inflation in Venezuela, am 20. Mai auf *Spiegel Online*:

Der Internationale Währungsfonds prognostiziert Venezuela im Jahr 2018 eine Inflation von 13 864 Prozent. Venezolanische Ökonomen halten das noch für viel zu optimistisch. „Wir sagen dieses Jahr eine monatliche Preissteigerung von durchschnittlich 107 Prozent voraus, Tendenz steigend“, sagt Jean Paul Leidenz. „Wir werden das Jahr mit einer Inflation von 388.000 Prozent abschließen“, glaubt der Chefökonom der Wirtschaftsberatungsgesellschaft Econalítica.

Wenn man die Rechnung mit den angegebenen Zahlen nachzuvollziehen versucht, kommt man auf

$$(2,07)^{12} = 6189,33\dots$$

Das ist deutlich mehr als der angegebene Faktor 3880. Sicher ist nicht jede Preissteigerung inflationsbedingt, andererseits wird aber die Inflationsrate doch regulär anhand der Verbraucherpreise bestimmt. Was also wurde hier eigentlich berechnet?

Schwächeres Wachstum

Am 2. September berichtete die Tagesschau über die neuen Kfz-Steuern und darüber, dass diese für manche Autobesitzer stärker steigen würden als für andere.

Der ADAC sieht das kritischer. Nach Berechnungen des Autoklubs liegen die Mehrkosten zwischen 20 und 70 Prozent, wie viel genau hängt vom jeweiligen Modell ab. So müssten Käufer dieses Suzuki Swift-Modells statt 88 künftig 108 Euro zahlen, 20 Euro mehr. Bei diesem VW Touareg-Modell mit höherem CO₂-Ausstoß würden die Steuern stärker steigen, um 94 Euro im Jahr.

Kfz-Steuer		
	Bislang	Künftig
Swift Sport 1.4 Boosterjet	88 €	108 € + 20 €
Touareg 3.0 V6 TDI EL 4Motion Tip.	459 €	553 € + 94 €
Quelle: ADAC

Das wäre sicher zu begrüßen, wenn es denn so wäre. Nun sind allerdings 20 von 88 Euro eine Steigerung um 22,73 Prozent, während 94 von 459 Euro nur eine Steigerung um 20,48 Prozent sind. Die Wahrheit ist also, dass die Steuern für den VW Touareg weniger stark steigen als für den Suzuki Swift. Schließlich werden Steuern doch immer noch prozentual berechnet und nicht absolut.

Abnehmend zunehmendes Wachstum

Schon etwas älter, nämlich aus einer Fernsehansprache Richard Nixons im US-amerikanischen Wahlkampf 1972, ist diese Erfolgsmeldung:

The rate of increase of inflation is going down.

Auf mathematisch: die zweite Ableitung der Inflation und damit die dritte Ableitung des Verbraucherpreisindex ist negativ.

Wahrscheinlich das erste Vorkommen einer dritten Ableitung in einer Wahlkampfrede.

Gar kein Wachstum

Wenn ein Haus gebaut wird und es aber keine freie Hausnummer mehr gibt, etwa weil das Haus zwischen den Häusern Nummer 3 und 4 zu stehen kommen soll, dann greift man in Deutschland meist zu Hausnummern wie 3a und ggf. dann fortlaufend 3b, 3c etc. In Frankreich sieht man öfter mal Hausnummern wie $3\frac{1}{2}$ oder *3bis*. Ich weiß nicht, was man dort macht, wenn später noch ein neues Haus dazu kommt; ob man dann vielleicht eine Hausnummer $3\frac{3}{4}$ vergibt. Im Friedhofweg in Augsburg-Göggingen wollte man es ganz elegant lösen: die sechs benachbarten Häuser haben die Hausnummern $3, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 3\frac{1}{5}, 3\frac{1}{6}$.

Dummerweise ist das keine wachsende Folge. Nicht einmal in den Absolutbeträgen zweiter oder dritter Ordnung.

Exponentielles Wachstum II

Das 1965 formulierte Mooresche Gesetz besagt, dass die Komplexität integrierter Schaltkreise sich regelmäßig verdoppelt, und zwar alle 18 Monate.

In einem Beitrag vom 16. Mai auf dem Blog „AI and Compute“ wurde dieses Gesetz an den Daten der letzten

Inzwischen gehen Debatten eher in eine andere Richtung und immer mehr Autoren entwerfen im Zusammenhang mit Google und Facebook das Szenario eines totalen Überwachungsstaates.

Über die Schrift hinaus, erschienen im Suhrkamp-Verlag, dessen Aufsichtsratsvorsitzende die Autorin Ulla Berkéwicz ist, versucht nun, diese Szenarien und die Entwicklung künstlicher Intelligenzen in einen größeren philosophischen und geisteswissenschaftlichen Zusammenhang einzuordnen, gründend (laut Verlagswerbung) „auf das vedische, das jüdische und das mathematisch-topologische Wissen“ – mit Norbert Wiener und Joseph Weizenbaum (im Buch „Rabbi Wiener“ und „Rabbi Weizenbaum“) als Wiedergänger des Rabbi Löw, der im Prag des 16. Jahrhunderts den Golem entwickelt haben soll.

Das Buch zerfällt in zwei Teile. Der erste ist eine wortgewaltige Abrechnung mit den (nach Meinung der Autorin) ursprünglich aus der Tradition der LSD-Aktivisten und Blumenkinder stammenden Netzaktivisten und Silicon Valley-Pionieren, die sich und ihre Erfindungen einer „neuen kapitalistischen Logik“ unterworfen hätten und nun eine neue Übermenschenideologie „esoterisch, rassistisch, amerikanisch konsumtiv“ vertreten würden.

Im zweiten Teil, und hier kommt nun der Mathematiker ins Staunen, geht es um Grigori Perelman, der (nach Meinung der Autorin) mit einem „Minimum an blinder Rechnung“ auskomme, weil er mit „einem Maximum an sehenden Gedanken“ arbeite. Im Buch wird Perelman dann gemeinsam mit der Schriftstellerin Friederike Mayröcker in einem Wiener Café die Entzweiung von Logos und Mythos überwinden. Der Verlag bewirbt diesen zweiten Teil so:

In einer überwältigenden poetischen Phantasie überschreitet in der dreizehnten Stunde einer Faschingsdienstagnacht eine Dichterpartisanin die Schwelle des Erzählens und ein Mathematikrebell die Zählbarkeit der Zahl. Das sprengt eine Potentaten-, Künstler- und Bürgergesellschaft aus ihrem Rahmen, so dass sie den beiden in ihre Vorstellungsfreiheit folgen kann. Die geistes- und naturwissenschaftlichen Grundgedanken für dieses anarchische Spektakel entwickelt eine so provokante wie kompromisslose Prosaschrift, die zeigt, was

möglich ist, wenn wir unsere Wahrnehmung nicht auf unsere Sphäre der drei Dimensionen beschränken, sondern unseren Vorstellungen freien Lauf lassen in Bereiche, die von den Begriffen Raum und Zeit nicht begrenzt sind.

Aus Sicht des Mathematikers sind das erstaunliche Behauptungen: im Vergleich zu Beweisen anderer topologischer Sätze ist der Beweis der Poincaré-Vermutung doch recht rechenintensiv. Aber natürlich ist das dichterische Freiheit und so wie Gödel immer herhalten muss für Interpretationen seiner Arbeit, die mit deren tatsächlicher Bedeutung wenig oder nichts zu tun haben, so darf man natürlich auch Perelman als Metapher verwenden.

Ob Maschinen die Macht übernehmen und Kreativität dann noch mit Rechenkraft mithalten können, das sollte natürlich auch von „fachfremden“ Geisteswissenschaftlern diskutiert werden. Was dieses Buch allerdings zu zäher Lektüre macht, ist die wohl als besonders kreativ empfundene Überfrachtung des Textes mit tausenden vagen Assoziationen zu allen möglichen geistesgeschichtlichen Bezügen. Über weite Strecken liest sich das wie die Arbeit eines Schülers, der seinem Lehrer beweisen will, was er alles schon gelesen und wie viele Fremdwörter er nachgeschlagen hat. Ein willkürlich herausgegriffenes Textbeispiel:

Seit also die exakten Wissenschaften des magischen Agens, die Theogonien und Kosmogonien des Hermes Trismestigos und des Moses Ben Amram, die dem all einen Zweck dienten, das universale Gleichgewicht, die aus der Analogie der Gegensätze resultierende Harmonie zu erhalten oder wiederherzustellen, dem Vergessen anheimgefallen, seit Manipulation mit Hilfe naturgegebener Mittel durch die unberechenbaren Möglichkeiten unserer Vorstellungsfreiheit, unseres baren Selbst, der Manipulation durch Berechenbares gewichen ist, seit kommerzialisierte Zweigwissenschaften mehr öffentlichen Reiz darstellen als ihre exakten Stammschulen, Zombiologie und Technomagie wirtschaften und wüten, Statistik als adäquate Beschreibung von Realität gilt und das Geräusch der Spülmaschine sich anhört, als atme da wer zuverlässig in unsere Gottverlassenheit, sind wir auf dem Abweg, uns selber um uns selbst zu bringen, uns der Struktur des Formalen anzupassen und als „Maschine der Natur“ berechenbar zu werden. Müssen wir, wie Erwin Schrödinger, der Quantenheilige, in weiter Voraussicht schrieb, fürchten, „dass wir uns entwicklungsmechanisch dem Ende einer Sackgasse nähern“.