NOTIZEN

Ausreduzierte Wellengleichungen für Elementarteilchen von halbzahligem Spin

Von F. L. Bauer

Institut für theoret. Physik der Universität München
(Z. Naturforschg. **4a**, 720–721 [1949]; eingeg. am 24. Okt. 1949)

Wellengleichungen von diracähnlichem Typus für Elementarteilchen mit beliebigem ganz- oder halbzahligem Spin

$$\left(\beta_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \kappa \right) \psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

wurden in letzter Zeit öfters diskutiert. Die Matrizen β_μ formulierte erstmals de Broglie¹ mit der „méthode de fusion“; bei N -facher Fusion ist der maximale Eigenwert der Matrizen β_μ $N/2$. Die Wellenkomponenten sind N -stufige Undoren². Bei dieser von Belinfante³ zu ausführlichen Untersuchungen angewandten Schreibweise der Wellengleichungen handelt es sich um noch nicht ausreduzierte Darstellungen; die Wellengleichungen zerfallen noch in vollständig unabhängige Teilsysteme. Die Undoren geradzahlig Stufe fallen mit den Tensoren zusammen, von denen bekannt ist, daß sie durch gewisse Symmetrie- und Spurbedingungen ausreduziert werden.

Lubanski⁴ hat die Matrizen β_μ durch die Vertauschungsrelationen der Gruppe D_5 der infinitesimalen Drehungen des R_5 definiert:

$$[\beta_\mu \beta_\nu, \beta_\lambda] = \beta_\mu \delta_{\nu\lambda} - \beta_\nu \delta_{\mu\lambda}.$$

Diese Definition ist der von de Broglie gleichwertig: Die Fusion beliebiger Darstellungen liefert stets eine neue, wobei die maximalen Eigenwerte addiert werden; ein Satz von Dirac-Matrizen bildet die einfachste Darstellung, von der de Broglie ausgeht. Durch die Fusion zweier Dirac-Darstellungen erhält man die Kemmer-Matrizen, aus denen alle Tensor-darstellungen des ganzzahligen maximalen Eigenwerts M durch weitere Fusion hervorgehen.

Die Darstellungen zum halbzahligem maximalen Eigenwert $M + 1/2$ gewinnt man nun vorteilhaft durch Fusion einer tensoriell geschriebenen passenden Darstellung vom maximalen Eigenwert M mit einer Dirac-Darstellung.

Aus den 5-reihigen Kemmer-Matrizen $\bar{\beta}_{\mu,\alpha\beta} \alpha\beta$ Kemmerschen Gleichungen des skalaren Mesons

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_\mu + \kappa \psi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi + \kappa \psi_\alpha &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

¹ L. de Broglie, *Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*. Gauthiers-Villars, Paris 1943.

liefern, erhält man durch die Fusion

$$\beta_\mu = \bar{\beta}_\mu \times 1 + 1 \times \frac{\gamma_\mu}{2} \quad (\gamma_\mu \text{ Dirac-Matrizen}) \quad (3)$$

die einfachste Darstellung zum maximalen Eigenwert $3/2$ und die zugehörigen Wellengleichungen

$$U = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_\mu + \left(\kappa + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi = 0, \quad (4')$$

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi + \left(\kappa + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = 0. \quad (4'')$$

ψ und ψ_α sind ein Skalar und ein Vierervektor, deren Elemente selbst vierkomponentige Diracsche Wellenfunktionen sind.

Von den Gln. (4) läßt sich noch ein Bestandteil abspalten. Kombiniert man sie gemäß $U' = \gamma_\mu U_\mu - U$, so ergibt sich für die Linearkombination

$$\psi' = \gamma_\mu \psi_\mu - \psi \quad (5')$$

die Wellengleichung $\left(\kappa - \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi' = 0$, also eine

Dirac-Gleichung. Bildet man $U'_\alpha = U_\alpha + \gamma_\alpha U$, so genügt die Linearkombination

$$\psi'_\alpha = \psi_\alpha + \gamma_\alpha \psi \quad (5'')$$

der viermal vierkomponentigen Spin-3/2-Gleichung

$$\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi'_\mu + \left(\kappa + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi'_\alpha = 0, \quad (6)$$

die wir zur Unterscheidung von der üblichen skalaren Dirac-Gleichung eine *vektorielle Dirac-Gleichung* nennen wollen. Im Gegensatz zu den von Bhabha⁵ und seiner Schule verwendeten Darstellungen tritt in unserer der Vektor-Spinor-Transformationscharakter zutage.

Man kann die Ausreduktion auch vornehmen, ohne die Transformationsformeln explizit zu benutzen. Das wird im nächsten Abschnitt wichtig werden. Fordert man nämlich $\psi' = 0$, so schaltet man die in Gl. (4)

² Undoren transformieren sich wie die Komponenten einer Diracschen Wellenfunktion oder wie Produkte aus solchen.

³ F. J. Belinfante, *Physica* **6**, 849, 887 [1939].

⁴ J. K. Lubanski, *Physica* **9**, 310 [1942].

⁵ Bhabha schreibt seine Gleichung dem Proton zu. B. S. Madhavarao, V. R. Thiruvengkatachar u. K. Venkatachaliengar, *Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A* **187**, 385 [1946], haben Matrizen für diesen Fall aufgestellt, die von Le Couteur, *Proc. Cambridge philos. Soc.* **44**, 63 [1948], zu weiteren Rechnungen verwendet wurden. Auch Hönl und Boerner haben Matrizen angegeben.

enthaltene Dirac-Gleichung aus. Das bedeutet, daß man die Wellenkomponenten von (4) der „Spurbedingung“

$$\psi = \gamma_\mu \psi_\mu \quad (4a)$$

unterwirft. Hier liegt es nahe, mit dieser Bedingung in die Gl. (4'') einzugehen. Man erhält die vektorielle Dirac-Gleichung⁶ in einer anderen Form

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \gamma_\mu \psi_\mu + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = 0, \quad (7)$$

Die Gl. (4') wird überflüssig, denn sie folgt aus Gl. (7).

Die 10-reihigen Kemmer-Matrizen $\bar{\beta}_\mu$ für das vektorielle Meson liefern Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_{\mu\alpha} + z \psi_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_\alpha + z \psi_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

mit den Komponenten eines Tensors II. Stufe, der durch die Bedingung der schiefen Symmetrie ausreduziert ist. Durch Fusion gemäß Gl. (3) entstehen die Wellengleichungen

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_{\mu\alpha} + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = 0, \quad (9')$$

$$U_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_\alpha + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_{\alpha\beta} = 0, \quad (9'')$$

die wie die Gln. (4) weiter ausreduziert werden können. Bildet man

$$U' = \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} U_{\mu\nu} + \gamma_0 U_0 \text{ und } U'_\alpha = \gamma_\mu U_{\alpha\mu} - \gamma_{\alpha\mu} U_\mu,$$

$$\text{wobei } \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \text{ ist,}$$

so genügen die Linearkombinationen

$$\psi' = \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} + \gamma_0 \psi_0, \quad (10')$$

$$\psi'_\alpha = \gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} - \gamma_{\alpha\mu} \psi_\mu \quad (10'')$$

den Wellengleichungen $\left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi' = 0$ und

$$\left(z - \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi'_\alpha - \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi'_\mu = 0.$$

Dies sind eine gewöhnliche und die vektorielle Dirac-Gleichung von vorhin. Schaltet man sie aus, indem man $\psi' = 0$ und $\psi'_\alpha = 0$ fordert, so erhält man zunächst die Nebenbedingungen

$$\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} + \gamma_0 \psi_0 = 0, \quad (9a')$$

$$\gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} = \gamma_{\alpha\mu} \psi_\mu \quad (9a'')$$

und daraus schließlich durch eine Umformung

$$\gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (9b')$$

⁶ Von dieser Gleichung, die Prof. Bopp auf etwas anderem Weg gefunden hat, ist vorliegende Untersuchung ausgegangen.

$$\psi_\alpha + \gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} = 0. \quad (9b'')$$

Es ist noch in einfacher Weise möglich, mit (9b'') in (9'') einzugehen. So erhält man schließlich eine *bivektorielle Dirac-Gleichung*

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_{\beta\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_{\alpha\mu} \right) \\ + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

mit den sämtlichen Nebenbedingungen

$$\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} = 0 \text{ und } \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0,$$

wodurch fünf mal vier wesentliche Komponenten für diese zweite *Spin-3/2-Gleichung* frei bleiben. (9') wird wiederum überflüssig.

Daß die so gewonnenen Darstellungen nicht weiter zerlegt (ausreduziert) werden können, folgt aus allgemeinen Sätzen über die Darstellungsgrade der Drehgruppe.

Die vorstehenden Umformungen haben wir auch mit den Matrizen β_μ ausgeführt, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten wollen. In ähnlicher Weise können wir die Ausreduktion für Wellengleichungen von Teilchen höheren Spins behandeln. Bezüglich der Beweise und aller Einzelheiten sei auf einen ausführlichen Bericht verwiesen.

Hrn. Prof. Bopp danke ich herzlich für Anregung⁷ und Diskussion.

⁷ F. Bopp, Z. Naturforschg. **3a**, 564 [1948]; F. Bopp u. F. L. Bauer, ebenda **4a**, 611 [1949].

Zur Spin-Bahn-Koppelung im Atomkern

Von H. Gaus

Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **4a**, 721–723 [1949]; eingeg. am 15. Nov. 1949)

Es ist öfter untersucht worden¹, ob sich der Aufbau der Atomkerne auf Grund eines „Potentialtopf-“ oder „Schalen“-Modells ähnlich dem der Elektronenhülle erklären läßt. Bei einem solchen Modell wird angenommen, daß man sich im Kern näherungsweise jedes der Nukleonen für sich in einem gemeinsamen Felde bewegt vorstellen darf. Diese Überlegungen erhielten neue Bedeutung und eine starke empirische Bestätigung durch die Arbeiten von Haxel, Jensen und Suess² bzw. Goepfert-Mayer³, die zeigten, daß man die empirisch ausgezeichneten Nukleonenzahlen als Besetzungszahlen abgeschlossener Schalen dann verstehen kann, wenn man annimmt, daß bei der Bewegung eines Nukleons im Kern eine sehr starke Spin-Bahn-Koppelung besteht, die zur Folge hat, daß das Termschema eines Atomkerns im Gegensatz zur Atomhülle nicht der Russel-

¹ s. z. B. Bethe u. Bacher, Rev. mod. Physics **8**, § 32 ff. [1936].

² Haxel, Jensen u. Suess, Naturwiss. **35**, 376 [1948].

³ Goepfert-Mayer, Physic. Rev. **75**, 1969 [1949].