enthaltene Dirac-Gleichung aus. Das bedeutet, daß man die Wellenkomponenten von (4) der „Spurbedingung“

$$\psi = \gamma_\mu \psi_\mu \quad (4a)$$

unterwirft. Hier liegt es nahe, mit dieser Bedingung in die Gl. (4'') einzugehen. Man erhält die vektorielle Dirac-Gleichung⁶ in einer anderen Form

$$-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \gamma_\mu \psi_\mu + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = 0, \quad (7)$$

Die Gl. (4') wird überflüssig, denn sie folgt aus Gl. (7).

Die 10-reihigen Kemmer-Matrizen $\bar{\beta}_\mu$ für das vektorielle Meson liefern Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_{\mu\alpha} + z \psi_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_\alpha + z \psi_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

mit den Komponenten eines Tensors II. Stufe, der durch die Bedingung der schiefen Symmetrie ausreduziert ist. Durch Fusion gemäß Gl. (3) entstehen die Wellengleichungen

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi_{\mu\alpha} + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_\alpha = 0, \quad (9')$$

$$U_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_\alpha + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_{\alpha\beta} = 0, \quad (9'')$$

die wie die Gln. (4) weiter ausreduziert werden können. Bildet man

$$U' = \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} U_{\mu\nu} + \gamma_0 U_0 \text{ und } U'_\alpha = \gamma_\mu U_{\alpha\mu} - \gamma_{\alpha\mu} U_\mu,$$

$$\text{wobei } \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) \text{ ist,}$$

so genügen die Linearkombinationen

$$\psi' = \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} + \gamma_0 \psi_0, \quad (10')$$

$$\psi'_\alpha = \gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} - \gamma_{\alpha\mu} \psi_\mu \quad (10'')$$

den Wellengleichungen $\left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi' = 0$ und

$$\left(z - \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi'_\alpha - \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi'_\mu = 0.$$

Dies sind eine gewöhnliche und die vektorielle Dirac-Gleichung von vorhin. Schaltet man sie aus, indem man $\psi' = 0$ und $\psi'_\alpha = 0$ fordert, so erhält man zunächst die Nebenbedingungen

$$\frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} + \gamma_0 \psi_0 = 0, \quad (9a')$$

$$\gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} = \gamma_{\alpha\mu} \psi_\mu \quad (9a'')$$

und daraus schließlich durch eine Umformung

$$\gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0, \quad (9b')$$

⁶ Von dieser Gleichung, die Prof. Bopp auf etwas anderem Weg gefunden hat, ist vorliegende Untersuchung ausgegangen.

$$\psi_\alpha + \gamma_\mu \psi_{\alpha\mu} = 0. \quad (9b'')$$

Es ist noch in einfacher Weise möglich, mit (9b'') in (9'') einzugehen. So erhält man schließlich eine *bivektorielle Dirac-Gleichung*

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \psi_{\beta\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \psi_{\alpha\mu} \right) \\ + \left(z + \frac{\gamma_\mu}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \psi_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

mit den sämtlichen Nebenbedingungen

$$\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha} = 0 \text{ und } \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0,$$

wodurch fünf mal vier wesentliche Komponenten für diese zweite *Spin-3/2-Gleichung* frei bleiben. (9') wird wiederum überflüssig.

Daß die so gewonnenen Darstellungen nicht weiter zerlegt (ausreduziert) werden können, folgt aus allgemeinen Sätzen über die Darstellungsgrade der Drehgruppe.

Die vorstehenden Umformungen haben wir auch mit den Matrizen β_μ ausgeführt, auf deren Wiedergabe wir hier verzichten wollen. In ähnlicher Weise können wir die Ausreduktion für Wellengleichungen von Teilchen höheren Spins behandeln. Bezüglich der Beweise und aller Einzelheiten sei auf einen ausführlichen Bericht verwiesen.

Hrn. Prof. Bopp danke ich herzlich für Anregung⁷ und Diskussion.

⁷ F. Bopp, Z. Naturforschg. **3a**, 564 [1948]; F. Bopp u. F. L. Bauer, ebenda **4a**, 611 [1949].

Zur Spin-Bahn-Koppelung im Atomkern

Von H. Gaus

Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **4a**, 721–723 [1949]; eingeg. am 15. Nov. 1949)

Es ist öfter untersucht worden¹, ob sich der Aufbau der Atomkerne auf Grund eines „Potentialtopf“- oder „Schalen“-Modells ähnlich dem der Elektronenhülle erklären läßt. Bei einem solchen Modell wird angenommen, daß man sich im Kern näherungsweise jedes der Nukleonen für sich in einem gemeinsamen Felde bewegt vorstellen darf. Diese Überlegungen erhielten neue Bedeutung und eine starke empirische Bestätigung durch die Arbeiten von Haxel, Jensen und Suess² bzw. Goepfert-Mayer³, die zeigten, daß man die empirisch ausgezeichneten Nukleonenzahlen als Besetzungszahlen abgeschlossener Schalen dann verstehen kann, wenn man annimmt, daß bei der Bewegung eines Nukleons im Kern eine sehr starke Spin-Bahn-Koppelung besteht, die zur Folge hat, daß das Termschema eines Atomkerns im Gegensatz zur Atomhülle nicht der Russel-

¹ s. z. B. Bethe u. Bacher, Rev. mod. Physics **8**, § 32 ff. [1936].

² Haxel, Jensen u. Suess, Naturwiss. **35**, 376 [1948].

³ Goepfert-Mayer, Physic. Rev. **75**, 1969 [1949].

Saunders-Koppelung, sondern der (j, j) -Koppelung entspricht.

Im folgenden soll nun darauf hingewiesen werden, daß sich eine solche Spin-Bahn-Koppelung aus der in der vektoriellen Mesontheorie angenommenen Wechselwirkung zwischen dem Mesonfeld und dem Nukleonenfeld zwanglos ergibt. Dabei soll die Frage nach der Art der Erzeugung des Mesonfeldes durch die Nukleonen und damit auch die Frage, ob die Sättigungseigenschaften der Kernkräfte auf einem Austauschcharakter beruhen oder andere Ursachen haben, ganz offen gelassen werden. Dementsprechend soll das Mesonfeld nur durch einen reellen Vierervektor φ^μ beschrieben werden. Die Wechselwirkung mit dem Nukleonenfeld sei in der Lagrange-Funktion durch den Term

$$L_1 = g \varphi_\mu v^\mu - \frac{f}{z} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^{\mu\nu}$$

gegeben⁴, worin v^μ der Stromdichtevektor,

$$v_0 = \psi^* \psi, \quad v^k = \psi^* \alpha_k \psi,$$

und $u^{\mu\nu}$ der antisymmetrische „Spindichttensor“ der Nukleonen ist,

$$u^{12} = \psi^* i \beta \alpha_3 \psi, \quad u^{xy} = \psi^* \beta \sigma_z \psi.$$

Die Wechselwirkungsparameter g und f haben die Dimension einer Ladung, z^{-1} ist die Compton-Wellenlänge der Mesonen. Addiert man zu L_1 die der kräftefreien Dirac-Gleichung entsprechende Lagrange-Funktion, so erhält man durch Variation von ψ^* bei zeitlich konstantem φ^μ die folgende Dirac-Gleichung⁵ ($\vec{\varphi} = \varphi^k = \varphi_k, \varphi_0 = -\varphi^0$):

$$\left\{ -\frac{E}{c} + \frac{g}{c} \varphi^0 + \vec{\alpha} \left(\mathbf{p} - \frac{g}{c} \vec{\varphi} \right) + \beta m c + i \beta \vec{\alpha} \frac{f}{c z} \text{grad } \varphi^0 + \beta \vec{\sigma} \frac{f}{c z} \text{rot } \vec{\varphi} \right\} \psi = 0.$$

Unter Vernachlässigung von Gliedern der Größenordnung $W/2mc^2$ gegen 1 geht dies über in die zweidimensionale Schrödinger-Gleichung ($W = E - mc^2$):

$$W = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{g}{mc} \vec{\varphi} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2mc^2} \left(g^2 \varphi^2 + \frac{f^2}{z^2} (\text{grad } \varphi^0)^2 \right) - \frac{g}{2mc} \frac{\hbar}{i} \text{div } \vec{\varphi} + \left(\frac{f}{z} - \frac{\hbar g}{2mc} \right) \vec{\sigma} \cdot \text{rot } \vec{\varphi} - \frac{\hbar f}{2mc z} \Delta \varphi^0 - \frac{f}{mc z} \vec{\sigma} \cdot \left[\text{grad } \varphi^0 \times \left(\mathbf{p} - \frac{g}{c} \vec{\varphi} \right) \right] + g \varphi^0.$$

Bei einem statischen Mesonfeld entspricht der Vektor $\vec{\varphi}$ einem konstanten Magnetfeld; er kann also nur von Null verschieden sein, wenn eine Richtung ausgezeichnet ist, d.h. wenn der Potentialtopf, in den das Nukleon eingelagert wird, ein „magnetisches Moment“ besitzt. Hier soll der Einfachheit halber angenommen werden, daß dies nicht der Fall ist, daß

also $\vec{\varphi} = 0$ ist. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die paarweise Spinabsättigung der Nukleonen im Kern gerade auf der Wirkung der $\vec{\varphi}$ -Terme beruhen könnte. Weiter werde angenommen, daß der letzte Term ein anziehendes Kernpotential liefert, das schematisch als abgeschrägtes Rechteckpotential dargestellt sei:

$$g \varphi^0 = -V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } 0 < r < R \\ -V_0 + \frac{V_0}{R'}(r-R) & \text{für } R < r < R+R' \\ 0 & \text{für } r > R+R'. \end{cases}$$

Drückt man dann φ^0 durch V aus, so erhält man mit $\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \hbar \vec{L}$:

$$W = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - V(r) + V_0 \frac{V_0}{2mc^2} \frac{f^2}{g^2} \frac{1}{(zR')^2} - V_0 \frac{f}{g} \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{zR'} \frac{1}{r} (\vec{\sigma} \cdot \vec{L} + 1),$$

wobei die letzten beiden Summanden außerhalb des Anstiegsbereiches des Potentials wegzulassen sind. Zur Abschätzung der Größenordnung der durch den letzten Summanden ($=V'$) hervorgerufenen Änderung der Energieniveaus ΔW werde R' klein gegen $R \approx$ Potentialradius $\approx$ Kernradius angenommen und zunächst $\psi^* \psi$ über den Bereich des Potentialanstieges als konstant $\approx (4\pi R^3/3)^{-1}$ betrachtet. Dann wird

$$\Delta W = \int \psi^* V' \psi d\tau = V_0 \frac{f}{g} \frac{\hbar}{mc} \frac{1}{z} \frac{3}{R^2} \left\{ -\frac{(l+1)}{l} \right\},$$

worin $-(l+1)$ für Spin parallel Bahndrehimpuls, $+l$ im antiparallelen Falle steht. (Die Vorzeichen in dem Ausdruck L_1 wurden willkürlich so gewählt, daß bei positivem f und g die Begünstigung der Parallelstellung herauskommt.) Nimmt man f und g von gleicher Größenordnung an, so folgt mit (klassischer Elektronenradius r_0 als Längeneinheit) $R = a r_0$, $z^{-1} \approx 0,5 r_0$, $\hbar/mc = 0,075 r_0$:

$$\Delta W \approx V_0 \frac{1}{10 a^2} \left\{ -\frac{(l+1)}{l} \right\},$$

was in der Größenordnung der geforderten Termverschiebung liegt. Dabei ist zu beachten, daß man bei größerem l nicht mehr $\psi^* \psi \sim R^{-3}$ setzen darf, da dann die Dichte am Kernrande infolge der Zentrifugalkraft größer wird als in der Mitte. Dieser Effekt erhöht den Anstieg der Aufspaltung mit l . Beim Vergleich dieser Aufspaltung mit dem Abstand der Terme von verschiedenen l -Werten im Potentialtopf ist ferner zu beachten, daß auch der letztere Abstand als Funktion des Kernradius mit $1/a^2$ abnimmt.

Zur Errechnung der Feldgrößen φ^μ werden im allgemeinen die Feldgleichungen von Proca benutzt, siehe z. B.⁴ und ⁵. Dann ergibt sich bekanntlich in der neutralen Theorie ein abstoßendes Potential $g \varphi^0$, während in der symmetrischen zwar ein anziehendes Potential $g \varphi^0$, aber für das Tensorkraftpotential der Neutron-Proton-Wechselwirkung das falsche Vorzeichen herauskommt⁵. Es können sich aber erhebliche

⁴ Kemmer, Proc. Roy. Soc. [London] **166**, 127 [1938].

⁵ Bethe, Physic. Rev. **57**, 260 [1939].

Änderungen ergeben, wenn man z. B. auch nichtlineare Mesontheorien mit in Betracht zieht. Wie oben bemerkt, sollte hier von diesen Fragen, die auch die Lagrange-Funktion im nukleonfreien Raum betreffen, sowie von der Möglichkeit, verschiedene Mesontheorien zu kombinieren, ganz abgesehen werden und vor allem darauf hingewiesen werden, daß

sich in jedem Fall aus der Kombination des Feldtensors mit dem Spindichttensor für das Nukleon eine starke Koppelung zwischen Spin und Bahndrehimpuls ergibt.

Hrn. Prof. Heisenberg und Hr. Prof. v. Weizsäcker möchte ich für viele lehrreiche Unterhaltungen und Hinweise herzlich danken.

BESPRECHUNGEN

Einführung in die Elektrizitätslehre. Einführung in die Physik, 2. Bd. Von R. W. Pohl. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. 13. und 14. Aufl., 4°, 302 S. mit 497 Abb., Preis DM 18.60.

Einführung in die Optik. Einführung in die Physik, 3. Bd. Von R. W. Pohl. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948. 7. und 8. Aufl., 4°, 356 S. mit 565 Abb., Preis DM 21.—.

Eigenart und Vorzüge von Pohls dreibändiger „Einführung in die Physik“ sind zu bekannt, als daß sie breiter Schilderung bedürften. Entstanden als Darstellung der Experimentalvorlesung, in deren Versuchs- und Demonstrationstechnik Pohl ja ganz neue Wege beschritt, wurde das Werk von Auflage zu Auflage eine immer vollständigere Gesamtdarstellung der Physik bis zu den modernsten Ergebnissen und Fragestellungen hin. Den Ausgang bilden stets einem großen Hörerkreis vorführbare und nach den Angaben des Buches reproduzierbare Versuche, so ausgewählt und angelegt, daß aus ihnen möglichst ohne mathematische Entwicklungen die allgemeinen Zusammenhänge herauspringen.

Die Notwendigkeit, die Bände diesmal ganz neu zu setzen, ermöglichte zahlreiche kleinere und größere Änderungen an Text und Abbildungen, insbesondere in der Elektrizitätslehre. Sie dienen einerseits dazu, die Grundlinien noch deutlicher und prägnanter hervortreten zu lassen, andererseits erweitern sie auf den gegenwärtig besonders wichtig gewordenen Gebieten den behandelten Stoff beträchtlich. Daß diese Inhaltsvermehrung fast ohne Umfangsvergrößerung sich ermöglichen ließ, ist erstaunlich. Schon durch Verkleinerung und Zusammenfassung von Abbildungen wurde viel Raum gewonnen, andererseits durch knappere und gedrängtere Gestaltung von Text und Formeln, was vielfach den Überblick sogar erleichtert hat. Hier und da mußten dabei freilich die ohnehin schon nicht immer geringen Anforderungen an den Leser noch weiter gesteigert werden. Aber ein Physikbuch soll bekanntlich keine bequeme Bergbahn sein. Zu welchen Gipfeln und zu welchen Ausblicken Pohls „Einführung“ (streckenweise mehr ein „Führer für Geübte“) den eifrig mitsteigenden Leser hinaufführt, verdient größte Bewunderung.

Größere Änderungen, Umstellungen und Einfügungen betreffen u. a. in der *Elektrizitätslehre*: Verknüpfung elektrischer und magnetischer Felder (Rowlandscher Versuch); Kräfte im Magnetfeld; Dia-, Para- und Ferromagnetismus; Wechselströme; elektrische Schwingungen und Wellen (Quarzuhr; Schwebungs-

summer; Empfindlichkeit der Wellenempfänger); Elektronenoptik; Ionenleitung in Salzkristallen; Hallspannung; Elektrophorese; Radioaktivität (Energie-tönungen; Paarbildung und Zerstrahlung; Höhenstrahlung und Mesonen; nicht behandelt ist die „Kernchemie“); Lorentz-Umformungen (u. a. Lebensdauer und Reichweite der Mesonen als Beispiel der Einsteinschen Zeitdehnung); neuer Schlußabschnitt: Die elektrischen Einheiten.

In der *Optik*: Zylinderlinsen; Bildfeldwölbung und Astigmatismus; Strahlungsstärke (insbesondere richtungsunabhängige) und Beleuchtungsstärke; Beugung (Abbildung von Nichtselbstleuchtern; Phasenkontrastverfahren); Beersches Extinktionsgesetz; Farbton und Schichtdicke; Kirchhoffsches Gesetz; selektive thermische Emission; Anhang: Dosierung von Röntgenlicht. — Zu berichtigen ist auf S. 330, Z. 8: „... wie auch eine allseitig (nicht einseitig!) beleuchtete Kreidekugel.“

E. Vogt, Marburg (Lahn).

Die Chemie in wasserähnlichen Lösungsmitteln. Von Gerhart Jander. Anorganische und Allgemeine Chemie in Einzeldarstellungen, herausgeg. von G. Jander und W. Klemm, Bd. I. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. 367 S. mit 78 Abb., 8°. Preis geb. DM 36.—.

Der vorliegende erste Band der geplanten Monographiensammlung über Probleme der anorganischen und allgemeinen Chemie ist dem eigenen Arbeitsgebiet des Verf. entnommen, der es nicht nur zum Teil erst erschlossen und seit vielen Jahren erfolgreich erweitert hat, sondern auch durch die Ausarbeitung und Entwicklung moderner physikalischer Methoden, wie etwa der konduktometrischen Maßanalyse, grundsätzlich Beiträge zu unseren Kenntnissen über das chemische Verhalten der Stoffe in verschiedensten nichtwässrigen Lösungsmitteln zu liefern vermochte. Das Buch umfaßt in acht ausführlichen Kapiteln die Chemie in den wasserfreien (flüssigen) Lösungsmitteln Fluorwasserstoff, Ammoniak, Schwefelwasserstoff, Cyanwasserstoff, Salpetersäure, Jod, Schwefeldioxyd und Essigsäureanhydrid; es berichtet eingehend über die Löslichkeiten und Umsetzungen anorganischer und organischer Verbindungen sowie über Molgewicht, Solvation, Assoziation, Komplexbildung, Dissoziation, Leitfähigkeit, amphoterer Verhalten usw. der verschiedenen Stoffe in diesen Lösungsmitteln.

Der leitende Gedanke, die genannten Lösungsmittel als „wasserähnlich“ zu bezeichnen, liegt darin,