Über den Einfluß elektrischer Felder auf die Lebensdauer des metastabilen Niveaus des Wasserstoffatoms¹

Von GERHART LÜDERS

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. 5 a, 608—611 [1950]; eingegangen am 10. Oktober 1950)

Es wird eine Neuberechnung des Einflusses elektrischer Felder auf die Lebensdauer des metastabilen Niveaus des Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung der Lamb-shift vorgelegt. Durch die Lamb-shift wird die mittlere Lebensdauer zwischen 0,03 und 10 Volt cm⁻¹ um mehr als zwei Zehnerpotenzen verlängert.

Die Metastabilität des $2S_{1/2}$ -Niveaus des Wasserstoffatoms beruht bekanntlich darauf, daß infolge der l -Auswahlregel ein mit elektrischer Dipolstrahlung verbundener Übergang in den Grundzustand verboten ist. Nach den Untersuchungen von Breit und Teller² ist ein Übergang in den Grundzustand am wahrscheinlichsten, wenn er mit der gleichzeitigen Emission von 2 Lichtquanten verbunden ist. Die mittlere Lebensdauer des $2S_{1/2}$ -Niveaus ergibt sich dabei zu etwa $1/7$ sec.

Ein äußeres elektrisches Feld vermischt den $2S$ -Zustand mit $2P$ -Zuständen und kann daher bei hinreichender Stärke die Lebensdauer, d. h. die Metastabilität, wesentlich vermindern. Bei Gültigkeit der Sommerfeldschen Feinstrukturformel, nach der Niveaus mit gleicher Hauptquantenzahl n und gleicher Drehimpulsquantenzahl j genau zusammenfallen, würde bereits ein schwaches äußeres Feld die beiden Zustände $j = 1/2, l = 0$ und $j = 1/2, l = 1$ völlig vermischen und die Lebensdauer beträchtlich herabsetzen. Allerdings sind Abweichungen von dieser Überlegung zu erwarten, solange die durch das elektrische Feld hervorgerufene Aufspaltung von der Größenordnung der natürlichen Niveaubreite ist (vgl. ³).

Nun ist vor einigen Jahren experimentell nachgewiesen⁴ und theoretisch verständlich gemacht⁵ worden, daß die Feinstrukturformel nicht in Strenge zutrifft. Diese Abweichung, die Lamb-shift, hat ihre Ursache in der Wechselwirkung des Elektrons mit dem Strahlungsfeld und führt u. a. dazu, daß der $2S_{1/2}$ -Term höher liegt als der $2P_{1/2}$ -Term. Bethe

und Mitarbb.⁶ errechnen für diese Verschiebung einen Wert von 1051 MHz.

Durch die Lamb-shift wird die Empfindlichkeit des metastabilen Niveaus in entscheidender Weise geändert. Hinreichend schwache Felder führen, da der $2S_{1/2}$ -Term und der $2P_{1/2}$ -Term nicht mehr zusammenfallen, zu einer nur geringfügigen P-Beimischung zu dem S -Zustand und daher zu einer nur geringfügigen Verminderung der Lebensdauer.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Neuberechnung des Einflusses elektrischer Felder auf die Lebensdauer des metastabilen Niveaus des Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung der Lamb-shift vorzulegen. Eine Berücksichtigung der natürlichen Linienbreite, die bei früheren Untersuchungen eine große Rolle spielte, erweist sich dabei als unnötig, da das S -Niveau und das P -Niveau bereits ohne äußeres Feld einen Abstand haben, der hinreichend groß gegen die natürliche Niveaubreite ist. Der durch diese Vernachlässigung begangene Fehler beträgt auch bei kleinsten Feldstärken weniger als 1 Prozent.

Um ein genaueres Urteil über die Rolle der Lamb-shift zu ermöglichen, wird dem Ergebnis dasjenige gegenübergestellt, das sich ohne Lamb-shift ergeben würde.

Durchführung der Rechnung

Ein angeregtes Niveau eines Atoms klingt unter Emission von elektrischer Dipolstrahlung mit einer Zeitkonstanten τ , der reziproken mittleren Lebensdauer, ab, die gegeben ist durch

¹ Teilweise enthalten in der unveröffentlichten Hamburger Dissertation (1950) des Verf.

² G. Breit u. E. Teller, *Astrophysic. J.* **91**, 215 [1940].

³ H. Bethe in *Hdb. Physik*, 2. Aufl., Bd. **24/1**, 273, Berlin 1933.

⁴ W. E. Lamb jr. u. R. Retherford, *Physic. Rev.* **72**, 241 [1947].

⁵ H. A. Bethe, *Physic. Rev.* **72**, 339 [1947]; T. A. Welton, *Physic. Rev.* **74**, 1157 [1948].

⁶ H. A. Bethe, L. M. Brown u. J. R. Stehn, *Physic. Rev.* **77**, 370 [1950].

$$\gamma = \sum_b \gamma_{ab} \quad (1)$$

mit

$$\gamma_{ab} = \frac{4}{3} \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\omega_{ab}}{c} \right)^3 (\mathbf{r}_{ab}^* \mathbf{r}_{ab}) \quad (2)$$

(vgl. ³⁾). In (1) ist über alle vom Anfangszustand *a* aus erreichbaren energetisch tieferen Endzustände *b* zu summieren. In (2) stellen die ω_{ab} die Kreisfrequenzen der Übergänge und die $\mathbf{r}_{ab}$ die zugehörigen Matrixelemente des Ortsvektors *r* dar. Von dem hier interessierenden $2S_{1/2}$ -Niveau aus sind, da der Grundzustand zweifach entartet ist, zwei Übergangsmöglichkeiten vorhanden. Ohne äußeres Feld sind diese allerdings als elektrische Dipolübergänge verboten: die Matrixelemente $\mathbf{r}_{ab}$ verschwinden.

Durch ein äußeres homogenes elektrisches Feld wird die Übergangsfrequenz in einer hier vernachlässigbaren Weise geändert, gleichzeitig aber erhalten die Matrixelemente infolge Änderung der Eigenfunktionen einen von Null verschiedenen Wert. Die hierdurch bedingte Abhängigkeit der Größe γ vom äußeren elektrischen Feld *F* gilt es nunmehr für das metastabile Niveau zu errechnen. Hierfür ist mittels einer Störungsrechnung zunächst die Energieänderung (Stark-Effekt) und anschließend die Änderung der Matrixelemente *r* für die Übergänge von diesem Zustand aus zu gewinnen.

Die Methode der Störungsrechnung wird an anderer Stelle dargestellt (vgl. ⁷, insbesondere Ziffer 3). Genauer zu untersuchen sind danach nur die Terme mit $m_j = 1/2$ (bzw. die damit zusammenfallenden mit $m_j = -1/2$). Die Säkulardeterminante (16₁) in ⁷ ist jetzt so abzuändern, daß die Lamb-shift mitberücksichtigt wird. Hierfür braucht die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bei Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes nicht erneut berechnet zu werden, da die der Lamb-shift entsprechende Zusatzenergie nach ⁵ gleich dem Erwartungswert von $\Delta(e^2/r)$ (Δ = Laplace-Operator) multipliziert mit einem von *n* abhängigen Faktor ist. Die Lamb-shift kann also dadurch berücksichtigt werden, daß zu den *n*-Teilmatrizen der verschiedenen Anteile des Energieoperators (vgl. ⁷) die *n*-Teilmatrix von $\Delta \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\mathbf{r})$ mit einem geeigneten Zahlenfaktor addiert wird. Dieser Faktor ist so zu wählen, daß der S-Term im feldfreien Fall eine Verschiebung von 1051 MHz erhält.

⁷ G. Lüders, Der Stark-Effekt des Wasserstoffs bei kleinen Feldstärken, Ann. Physik (im Erscheinen).

Die durch ein elektrisches Feld der Stärke *F* hervorgerufene Energieänderung δE , bezogen auf das Niveau mit $j = 3/2$ als Nullpunkt, ergibt sich dann als Lösung der folgenden Säkulardeterminante

$$\begin{vmatrix} -\xi & 0 & A\sqrt{6} \\ 0 & -\frac{1}{16} - \xi & -A\sqrt{3} \\ A\sqrt{6} & -A\sqrt{3} & \epsilon - \frac{1}{16} - \xi \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

und der daraus folgenden algebraischen Gleichung

$$\xi^3 + \xi^2 \left(\frac{1}{8} - \epsilon \right) + \xi \left(\frac{1}{256} - \frac{\epsilon}{16} - 9A^2 \right) - \frac{3}{8} A^2 = 0. \quad (4)$$

Dabei sind folgende dimensionslosen Größen benutzt worden

$$A = \frac{e a F}{\alpha^2 e^2 / 2 a}, \quad \xi = \frac{\delta E}{\alpha^2 e^2 / 2 a}. \quad (5)$$

Die Größe ϵ stellt die Lamb-shift, gemessen ebenfalls in Einheiten $\alpha^2 e^2 / 2 a$, dar und hat bei Zugrundelegung einer Verschiebung von 1051 MHz den Zahlenwert $6,002 \cdot 10^{-3}$. $a = \hbar^2 / m_0 e^2$ bedeutet den Radius der innersten Bohrschen Bahn, $\alpha = e^2 / \hbar c$ die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

In der Säkulardeterminante (3) bezieht sich die erste Zeile und Spalte auf die Funktion mit $j = 3/2$, $l = 1$, die zweite Zeile und Spalte auf die Funktion mit $j = 1/2$, $l = 1$ und die dritte auf $j = 1/2$, $l = 0$. Die ungestörten Funktionen sollen in der genannten Reihenfolge, in Übereinstimmung mit ⁷, mit ψ_2 , ψ_3 , ψ_4 bezeichnet werden.

Wenn man sich lediglich auf die Untersuchung der bei Anlegen eines Feldes aus den Niveaus mit $j = 1/2$ hervorgehenden Terme beschränkt, so genügt es, die Energieänderung bei hinreichend kleinen Feldern aus der folgenden Determinante

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{16} - \xi & -A\sqrt{3} \\ -A\sqrt{3} & \epsilon - \frac{1}{16} - \xi \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

d. h. der Gleichung

$$\left(\xi + \frac{1}{16} \right)^2 - \epsilon \left(\xi + \frac{1}{16} \right) - 3A^2 = 0 \quad (7)$$

zu berechnen. Löst man (7) für hinreichend kleine Felder durch die ersten Glieder einer Reihenentwicklung; so gilt schließlich für den aus dem metastabilen

Niveau hervorgehenden Term

$$\xi + \frac{1}{16} = \varepsilon + \frac{3}{\varepsilon} A^2 + \dots \quad (8)$$

Einen Überblick über den Verlauf der Größe ξ (bzw. der Verschiebung in cm^{-1}) als Funktion der Feldstärke F gibt Abb. 1, in der zum Vergleich derjenige Verlauf gestrichelt eingetragen ist, der sich ohne Lamb-shift ergeben würde. Unterhalb einer Feldstärke von etwa 200 Volt cm^{-1} wurde der Verlauf der von $j = 1/2$ ausgehenden Terme mittels (7) berechnet. Da bei $j = 1/2$ der S-Term ($l = 0$) und der P-Term

Abb. 1. Termverschiebung des Niveaus $n = 2$ als Funktion der elektrischen Feldstärke ohne (----) und mit (—) Berücksichtigung der Lamb-shift.

($l = 1$) ohne Feld nicht mehr genau zusammenfallen, erhält man zunächst statt des linearen einen quadratischen Anstieg [vgl. (8)]. Im Falle großer Feldstärken ergibt sich infolge der Lamb-shift eine Verschiebung der äußeren Terme ($n_F = \pm 1$) um die Hälfte ($0,017 \text{ cm}^{-1}$) der Verschiebung ohne Feld.

In Abb. 1 ist außerdem ein von $j = 3/2$ nach $n_F = 0$ gehender, zu $m_j = 3/2$ gehörender Term eingetragen, auf den die Lamb-shift keinen Einfluß hat.

Nachdem der Verlauf von ξ (d. h. von der Energieverschiebung δE) für den vom metastabilen Niveau ausgehenden Term errechnet worden ist, läßt sich die Änderung der Größe γ durch ein äußeres Feld gewinnen.

Die zum metastabilen Niveau gehörige Eigenfunktion ψ_4 wird nämlich bei Anlegen des Feldes F ge-

ändert in

$$\varphi = a_2 \psi_2 + a_3 \psi_3 + a_4 \psi_4, \quad (9)$$

wobei sich die feldstärkeabhängigen Entwicklungskoeffizienten a_k bis auf einen gemeinsamen Normierungsfaktor N aus den Unterdeterminanten zu einer (also z. B. der ersten) Zeile von (3) errechnen

$$\begin{aligned} N a_2 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{16} - \xi & -A\sqrt{3} \\ -A\sqrt{3} & \varepsilon - \frac{1}{16} - \xi \end{vmatrix}, \\ N a_3 &= - \begin{vmatrix} 0 & -A\sqrt{3} \\ A\sqrt{6} & \varepsilon - \frac{1}{16} - \xi \end{vmatrix}, \\ N a_4 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{16} - \xi \\ A\sqrt{6} & -A\sqrt{3} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

N ist so zu bestimmen, daß gilt

$$|a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2 = 1. \quad (11)$$

In (10) ist für ξ die entsprechende Lösung von (4) einzusetzen.

Im Rahmen der Näherung (7) kann, indem man die Unterdeterminanten der Determinante (6) entnimmt, gesetzt werden

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{16} - \varepsilon + \xi}{\sqrt{\left(\frac{1}{16} - \varepsilon + \xi\right)^2 + 3A^2}}, \\ a_4 &= \frac{\sqrt{3}A}{\sqrt{\left(\frac{1}{16} - \varepsilon + \xi\right)^2 + 3A^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Die in (2) einzusetzenden, infolge des Einflusses des äußeren Feldes abgeänderten Matrixelemente r_{ab} für die Übergänge zum Grundzustand errechnen sich nunmehr wegen (9) zu

$$\int \varphi^* r_{zb} d\tau = a_2^* \int \psi_2^* r_{zb} d\tau + a_3^* \int \psi_3^* r_{zb} d\tau. \quad (13)$$

Dabei beziehen sich die Funktionen ψ_2, ψ_3 , wie oben angegeben, auf den Anfangszustand $n=2$, während χ_1 und χ_2 die beiden Eigenfunktionen ($m_j = +1/2$ bzw. $m_j = -1/2$) des durch ein Feld übrigens nicht beeinflussten Grundzustandes $n=1$ bedeuten. Das Matrixelement $\int \psi_4^* r_{zb} d\tau$ tritt wegen der l -Auswahlregel in (13) nicht auf. Die übrigen Matrixelemente sind durch die nachfolgende Aufstellung gegeben (vgl. z. B. 3).

$$\left. \begin{aligned} \int \psi_2^* \mathbf{r} \chi_1 d\tau &= \frac{2^8}{3^{11/2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \int \psi_2^* \mathbf{r} \chi_2 d\tau &= -\frac{2^7}{3^{11/2}} \mathbf{a} (x_0 - i y_0), \\ \int \psi_3^* \mathbf{r} \chi_1 d\tau &= -\frac{2^{15/2}}{3^{11/2}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{z}_0, \\ \int \psi_3^* \mathbf{r} \chi_2 d\tau &= -\frac{2^{15/2}}{3^{11/2}} \mathbf{a} (x_0 - i y_0). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$\mathbf{z}_0, y_0, z_0$ bedeuten die Einheitsvektoren in der x, y, z -Richtung (Feld $\parallel \mathbf{z}_0$). Aus (13) und (14) folgt zunächst unter Benutzung der Normierungsbedingung (11)

$$|\int \varphi^* \mathbf{r} \chi_1 d\tau|^2 + |\int \varphi^* \mathbf{r} \chi_2 d\tau|^2 = \frac{2^{15}}{3^{10}} a^2 (1 - |a_4|^2). \quad (15)$$

Drückt man jetzt in (2) die Übergangsfrequenz mittels der R y d b e r g - Formel durch die atomaren Konstanten aus und benutzt die Abkürzung

$$\Gamma = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \alpha^4 \frac{c}{a} = 6,27 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}, \quad (16)$$

so gilt schließlich für die durch das Feld geänderte reziproke mittlere Lebensdauer für Dipolübergänge von dem metastabilen Niveau des Wasserstoffs aus die nachfolgende Beziehung

$$\gamma = \Gamma (1 - |a_4|^2). \quad (17)$$

Ohne Feld ($A = 0$) hat a_4 den Wert 1 und nimmt für starke Felder ($A \gg 1$) asymptotisch den Wert Null an, da in (10) $N a_2$ und $N a_3$ bei starken Feldern proportional A^2 , $N a_4$ aber proportional A ist. γ ändert sich also bei Anlegung eines wachsenden Feldes von Null bis Γ .

In der Abb. 2 ist dieser Verlauf in doppelt-logarithmischem Maßstab aufgetragen, wobei zu dem gemäß (17) berechneten γ -Wert der von Breit und Teller² errechnete γ -Wert von 7 sec^{-1} für Übergänge unter Emission zweier Quanten addiert wurde. Die hierdurch hervorgerufene Krümmung der Kurve macht sich in der Abbildung erst unterhalb 0,2 Volt cm^{-1} bemerkbar. Gl. (17) wurde unterhalb 50 Volt cm^{-1} mittels der aus (12) und (8) folgenden Näherung

$$\gamma = 3 \left(\frac{A}{\epsilon}\right)^2 \Gamma = 4,45 \cdot 10^{-6} \left(\frac{F}{\text{Volt cm}^{-1}}\right) \cdot \Gamma \quad (18)$$

ausgewertet. Unterhalb 300 Volt cm^{-1} wurde mit der Näherung (12) und (7) und oberhalb 300 Volt cm^{-1} mit der vollständigen Beziehung (10) gerechnet.

Um die Rolle zu verdeutlichen, die die Lamb-shift bei der Verlängerung der mittleren Lebensdauer spielt, ist in der gleichen Abbildung derjenige Verlauf von γ als Funktion der Feldstärke aufgetragen, der sich bei Fehlen der Lamb-shift ergeben würde. Es genügt hierfür nicht, die ganze Rechnung in der gleichen Weise zu wiederholen, und nur ϵ gleich Null zu setzen, insbesondere also (17) mit entsprechend abgeändertem a_4 beizubehalten. Wie bereits am Anfang der Arbeit betont wurde, sind die Abweichungen, die von der natürlichen Breite des $2P_{1/2}$ -Niveaus herühren, zu berücksichtigen.

Abb. 2. Die reziproke mittlere Lebensdauer des metastabilen Niveaus als Funktion der Feldstärke (----) ohne und (—) mit Berücksichtigung der Lamb-shift.

Es ergibt sich dann (vgl. ³) die folgende, mindestens bis 20 Volt cm^{-1} mit guter Näherung gültige Beziehung

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \Re \epsilon \left[1 - 48 \left(\frac{e a F}{\hbar \Gamma}\right)^2\right]\right) \Gamma \quad (19)$$

($\Re$ = Realteil), die für genügend kleine Feldstärken (bis zu einigen Volt cm^{-1}) durch die Näherung

$$\gamma = 12 \left(\frac{e a F}{\hbar \Gamma}\right)^2 \Gamma = 1,97 \cdot 10^{-3} \left(\frac{F}{\text{Volt cm}^{-1}}\right)^2 \cdot \Gamma \quad (20)$$

ersetzt werden kann. Auch hier ist natürlich der γ -Wert von 7 sec^{-1} für die Emission zweier Quanten hinzu zu addieren.

Ein Blick auf die Abb. 2 und der Vergleich von (18) mit (20) zeigen, daß bei Feldstärken zwischen 0,03 und 10 Volt cm^{-1} infolge der Lamb-shift eine Verlängerung der mittleren Lebensdauer um mehr als zwei Zehnerpotenzen stattfindet.

Ausbreitung elektrischer Wellen längs geschichteter und längs kontinuierlich veränderlicher Plasmen

Von W. O. SCHUMANN

Aus dem Elektrophysikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforschg. 5 a, 612—617 [1950]; eingegangen am 21. Oktober 1950)

Es wird die Wellenausbreitung längs eines geschichteten und längs eines kontinuierlich in seiner Dichte veränderlichen Plasmas beschrieben. Für ein Plasma aus 2 Schichten, von denen die innere dichter ist, ergeben sich in der Frequenz 2 Ausbreitungsbereiche, in denen jeweils die Phasengeschwindigkeit vom Werte c bei der unteren Grenzfrequenz auf den Wert Null bei der oberen Frequenzgrenze sinkt. Ein Plasma, dessen Dichte linear nach innen beliebig hoch ansteigt, hat eine Grenzschichtwelle bei der Frequenz unendlich, wo sich die Welle sehr stark um die Stelle $\varepsilon = 0$ herum konzentriert und die Phasengeschwindigkeit gegen Null geht. Für ein Plasma konstanter Dichte und der Eigenfrequenz ω_0 , mit einer in der Dichte linear nach außen abfallenden Übergangsschicht, sind Wellen nur für $\varepsilon_P < -1$, d. h. $\omega^2 < \omega_0^2/2$ möglich. Je mehr sich die Welle um die Stelle $\varepsilon = 0$ konzentriert, und je geringer ihre Phasengeschwindigkeit ist, um so näher liegt ω^2 an $\omega_0^2/2$. Die Dämpfung des Plasmas spielt eine sehr erhebliche Rolle.

I. Über elektrische Wellen längs eines geschichteten Plasmas

In einer Arbeit¹ habe ich gezeigt, daß Wellen längs einer homogenen Plasmaschicht bzw. eines Plasmazylinders sich nur bei Frequenzen $\omega \geq \omega_0/\sqrt{2}$ ($\omega_0^2 = Ne^2/m\varepsilon_0$) ausbreiten, und daß die Phasen-

Abb. 1.

und Gruppengeschwindigkeit vom Werte c bei $\omega = 0$ bis auf den Wert Null bei der oberen Grenzfrequenz $\omega_g = \omega_0/\sqrt{2}$ abfällt.

Da begrenzte Plasmen niemals streng homogen sind, war noch zu diskutieren, ob dies auch bei Plasmen veränderlicher Dichte zutrifft.

Es soll deshalb zunächst im folgenden ein geschichtetes Plasma nach Abb. 1 untersucht werden.

Wir setzen für die Schichtung, zweidimensional, mit der Form $e^{j(\omega t - ax)}$ eine longitudinale E -Welle an:

1. in Luft

$$H_{z_0} = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_{x_0} = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y},$$

$$E_{y_0} = \frac{a}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y},$$

ε_0 Dielektrizitätskonstante des Vakuums,

$$a^2 - \omega^2/c^2 = m_0^2;$$

2. im äußeren Plasma 2

$$H_{z_2} = A_2 e^{-m_2 y} + B_2 e^{m_2 y},$$

$$E_{x_2} = j \frac{m_2}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} [A_2 e^{-m_2 y} - B_2 e^{m_2 y}],$$

$$E_{y_2} = \frac{a}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2} [A_2 e^{-m_2 y} + B_2 e^{m_2 y}],$$

$\varepsilon_2 = 1 - \omega_{02}^2/\omega^2$, relative Dielektrizitätskonstante des Plasmas 2,

$$a^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_2 = m_2^2,$$

3. im inneren Plasma 1 ein in E_x zu $y = 0$ symmetrisches Feld

$$H_{z_1} = -A_1 \sin m_1 y, \quad E_{x_1} = j \frac{m_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} A_1 \cos m_1 y,$$

$$E_{y_1} = -\frac{a}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1} A_1 \sin m_1 y,$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}, \quad a^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 = m_1^2.$$

¹ W. O. Schumann, S.-B. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. 1948, 255.

Dann ergeben die Stetigkeitsbedingungen an den Grenzen $y = \delta$ und $y = D$ die Gleichung

$$-\Im g m_1 \delta = \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{1 + \varepsilon_2 \frac{m_0}{m_2} \Im g m_2 (D - \delta)}{1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{m_2}{m_0} \Im g m_2 (D - \delta)}, \quad (\text{I. 1})$$

wozu noch für die m die Gleichungen gelten

$$m_1^2 - m_0^2 = \frac{\omega_{01}^2}{c^2}, \quad m_2^2 - m_0^2 = \frac{\omega_{02}^2}{c^2}. \quad (\text{I. 2})$$

Es ist also $m_1 > m_2 > m_0$, wenn $\omega_{01} > \omega_{02}$ ist, d. h. in der Mitte das dichteste Plasma ist. Da m_0 positiv und reell sein muß, kommen imaginäre m_1 und m_2 nicht in Frage. Die „graphische“ Lösung dieser Gleichung ist nur im dreidimensionalen m_0 -, m_1 - und m_2 -Raum möglich. Wir wollen dies hier nicht durchführen, sondern nur nach der Existenz der eingangs erwähnten beiden charakteristischen Grenzpunkte bei $\omega = 0$, $v_P = c$, und $v_P = 0$ bei einer oberen Grenzfrequenz fragen.

a) $v_P = \omega/a = 0$ bei der oberen Grenzfrequenz, Bildung einer Grenzflächenwelle

In diesem Falle erwarten wir analog Arbeit¹, daß m_1 , m_2 und m_0 mit a sehr groß und von gleicher Größenordnung werden. Dann können wir die $\Im g$ gleich 1 setzen und aus der Stetigkeitsbedingung (I. 1) m_2/m_0 als Funktion von m_1/m_0 berechnen. Als Lösung ergibt sich

$$\frac{m_2}{m_0} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{m_1}{m_0}.$$

Führt man nun nach (I. 2.)

$$m_1^2/m_0^2 = 1 + \omega_{01}^2/c^2 m_0^2,$$

$$\text{und } m_2^2/m_0^2 = 1 + \omega_{02}^2/c^2 m_0^2$$

in diese Gleichung ein, so entsteht

$$\frac{1}{c^2 m_0^2} = \frac{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2 - 1}{\omega_{02}^2 - (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^2 \omega_{01}^2}.$$

m_0^2 wird also nur dann sehr groß, wenn

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 = -1 \quad (\text{I. 3})$$

ist, und gleichzeitig $\omega_{02}^2 \neq \omega_{01}^2$ ist.

Aus der Bedingung (I. 3.) folgt als obere Grenzfrequenz, bei der $a \rightarrow \infty$, $v_P \rightarrow 0$ geht

$$\omega_g^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2}{\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2}.$$

Für $\omega_{01} > \omega_{02}$, d. h. innen dichteres Plasma, folgt im Plasmakern $\varepsilon_1 < 0$, und in der äußeren Plasmahülle $\varepsilon_2 > 0$. Die Felder im Kernplasma steigen sehr stark gegen den äußeren Rand an. In der äußeren Plasmahülle fallen sie nach außen sehr stark ab, da die Konstante B sehr klein gegen A wird. Die Schichtdicken spielen in diesem Fall keine Rolle, da die Welle sich so stark um die Grenze Kernplasma — Plasmahülle, $y = \delta$, konzentriert, daß die Dicke des Kerns und der Hülle keine Rolle spielen. Die Welle verläuft ganz innerhalb des Plasmas und in der äußeren Luft merkt man so gut wie nichts von ihr. Die Feldstärken E_{y1} und E_{y2} sind einander entgegengesetzt gerichtet, da A_1 das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie A_2 , ε_1 negativ und ε_2 positiv ist. Es treten also pulsierende Raumladungen an den Plasmagrenzen auf. Es ist wegen der Stetigkeit

$$\frac{A_2}{A_1} = e^{m_2 D} \frac{1 + \frac{m_0}{m_2} \varepsilon_2}{1 - \frac{m_0}{m_2} \varepsilon_2}$$

und

$$A_1 \sin m_1 \delta = -A_2 \left[e^{-m_2 \delta} + e^{-m_2 D} \frac{1 - \frac{m_0}{m_2} \varepsilon_2}{1 + \frac{m_0}{m_2} \varepsilon_2} \right].$$

Damit ist eine Grenzflächenwelle innerhalb des Plasmas und eine obere Grenzfrequenz für $\omega_{01} \neq \omega_{02}$ nachgewiesen.

Es existiert aber noch eine tiefer liegende Grenzfrequenz mit $v_P = 0$, die aus (I. 1) folgt, wenn $\varepsilon_2 m_0/m_2 \rightarrow -1$ geht. Es wird dann der Bruch der Gl. (I. 1) unbestimmt, %, wenn m_0 und m_2 mit gleicher Größe gegen ∞ gehen und gleichzeitig $\varepsilon_2 \rightarrow -1$. Schreibt man die Gl. (I. 1) in der Form

$$\Im g m_2 D = \frac{-\frac{m_2}{m_0 \varepsilon_2} \left[-\Im g m_1 \delta \cdot \Im g m_2 \delta + \frac{m_1}{m_2} \varepsilon_2 \right] - \left[\Im g m_1 \delta - \frac{m_1 \varepsilon_2}{m_2} \Im g m_2 \delta \right]}{-\Im g m_1 \delta \cdot \Im g m_2 \delta + \frac{m_1}{m_2} \varepsilon_2 + \frac{m_2}{m_0 \varepsilon_0} \left[\Im g m_1 \delta - \frac{m_1 \varepsilon_2}{m_2} \Im g m_2 \delta \right]},$$

so sieht man, daß in diesem Fall $\Im g m_2 D \rightarrow 1$, d. h. $m_2 \rightarrow \infty$ geht, mit $\varepsilon_2 \rightarrow -1$, d. h. $\omega^2 \rightarrow \omega_{02}^2/2$ und daher auch $m_0 \rightarrow \infty$. Es ist dies eine Grenzflächenwelle an der Grenze des äußeren Plasmas gegen die Luft. Wir haben also 2 obere Grenzfrequenzen mit $v_P = 0$ bei $\omega = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)/2$ und bei $\omega^2 = \omega_{02}^2/2$.

b) Verhalten bei $\omega \rightarrow 0$

In diesem Fall erwarten wir nach Arbeit¹, daß mit $\omega \rightarrow 0$, m_0 auch gegen Null geht, $v_P \rightarrow c$, wobei aber gleichzeitig ε_1 und ε_2 gegen ∞ gehen.

$$\varepsilon_1 \rightarrow -\omega_{01}^2/\omega^2, \quad \varepsilon_2 \rightarrow -\omega_{02}^2/\omega^2.$$

m_2 und m_1 bleiben endlich. Da auch α mit ω gegen Null geht, nähern sich mit verschwindender Frequenz

$$m_1^2 \rightarrow \omega_{01}^2/c^2, \quad m_2^2 \rightarrow \omega_{02}^2/c^2.$$

Mit diesen Voraussetzungen kann man aus der Stetigkeitsgleichung (I.1) $m_0 \varepsilon_1$ berechnen und erhält

$$\begin{aligned} -m_0 \varepsilon_1 &= m_0 \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \\ &= \frac{\omega_{01}}{c} \frac{\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \Im g m_1 \delta \Im g m_2 (D - \delta) + 1}{\Im g m_1 \delta + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \Im g m_2 (D - \delta)}. \end{aligned}$$

Hieraus kann m_0 berechnet werden und man erkennt, daß es proportional mit ω^2 gegen Null geht. Für $\omega_{01} = \omega_{02}$ geht die Gleichung über in

$$m_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0 c} \frac{1}{\Im g m_1 D}$$

wie in Arbeit¹ für homogenes Plasma abgeleitet.

Mit abnehmender Frequenz nähert sich die Phasengeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Das Feld erstreckt sich sehr weit in den Luftraum und ist innerhalb der Plasmen nur wenig veränderlich.

c) Lichtgeschwindigkeit bei endlicher Frequenz

Nicht nur bei $\omega = 0$ wird $v_P = c$, sondern auch für endliches ω mit $m_0 = 0$, $\alpha = \omega/c$, $m_1^2 = \omega_{01}^2/c^2$, $m_2^2 = \omega_{02}^2/c^2$ folgt aus (I.1) für endliche ε_1 und ε_2

$$-\Im g m_1 \delta \Im g m_2 (D - \delta) = \frac{m_1}{m_2} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ und daraus die Frequenz.

Da $m_1 \delta$ und $m_2 (D - \delta)$ in diesem Fall meist klein gegen 1 sind, kann man $\Im g$ durch die Argu-

mente ersetzen und erhält dann

$$-\delta (D - \delta) \frac{\omega_{02}^2}{c^2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

und daraus

$$\omega^2 = \omega_{02}^2 \frac{1 + \delta (D - \delta) \omega_{01}^2/c^2}{1 + \delta (D - \delta) \omega_{02}^2/c^2}.$$

Es ist also bei $\omega_{01} > \omega_{02}$, $\omega^2 > \omega_{02}^2$ aber $\omega^2 < \omega_{01}^2$, d. h. $\varepsilon_2 > 0$ und $\varepsilon_1 < 0$.

Wir haben also 2 Frequenzbänder zu erwarten. Das erste von $\omega^2 = 0$ bis $\omega_{02}^2/2$ und das zweite von

$$\omega^2 = \omega_{02}^2 \frac{1 + \delta (D - \delta) \omega_{01}^2/c^2}{1 + \delta (D - \delta) \omega_{02}^2/c^2}$$

bis $\omega^2 = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)/2$. In beiden geht die Phasengeschwindigkeit von $v_P = c$ an der unteren Grenze bis auf Null bei der oberen Grenze.

II. Plasma mit kontinuierlicher Dichteverteilung

Wenn die Dichteverteilung eines Plasmas entsprechend Abb. 1 *kontinuierlich* in y -Richtung sich ändert, so ergibt sich für (TrH) longitudinale E -Wellen, die in x -Richtung laufen, mit dem Ansatz $e^{i(\omega t - \alpha x)}$ die Differentialgleichung für H_z

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \alpha^2 \right) H_z = 0, \quad (\text{II. 1})$$

$$\varepsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad \omega_0^2 = \frac{N e^2}{m \varepsilon_0}, \quad \varepsilon = f(y) \quad (\text{II. 2})$$

und

$$E_x = -\frac{j}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} H_z. \quad (\text{II. 3})$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung wird an anderer Stelle diskutiert werden. Eine brauchbare Näherung für viele Zwecke ist die Annahme $\alpha^2 \gg \omega^2 \varepsilon/c^2$ oder $v_P^2/c^2 \ll 1/\varepsilon$, die besonders in der Gegend kleiner v_P und kleiner ε gut zutrifft, da v_P normalerweise $< c$ ist.

Nimmt man einen linearen Verlauf der Dielektrizitätskonstante an, z. B. $\varepsilon = y a$, so wird aus (II.1)

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} a y - \alpha^2 \right) H_z = 0. \quad (\text{II. 4})$$

In diesem Fall ist für $y = 1/a$, $\omega_0^2 = 0$, $\varepsilon = 1$ und für $y = 0$, $\varepsilon = 0$, ist ω_0^2 auf ω^2 angestiegen. Für negatives y ist $\omega^2 < \omega_0^2$. Für linearen Anstieg der Plasmadichte $-d\omega_0^2/dy = k$ ist

$$a = k/\omega^2, \quad (\text{II. 5})$$

d. h. für tiefe Frequenzen liegt $\varepsilon = 0$ nahe am Plasmarand, dagegen für hohe Frequenzen tief innerhalb des Plasmas. Setzt man wieder $a y \omega^2 / c^2 \ll \alpha^2$, d. h. $a y \ll c^2 / v_p^2$ voraus, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \alpha^2 H_z = 0$$

und hat die Lösung $H_z = y Z_1(j \alpha y)$, wo Z eine Besselsche Funktion ist. Damit wird

$$E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} Z_0(j \alpha y) \quad \text{und} \quad E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} Z_1(j \alpha y).$$

Für die angrenzende Luft setzen wir wieder

$$H_{z_0} = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_{x_0} = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y}.$$

Aus der Stetigkeit von H_z und E_x für $y = 1/a$ folgt dann

$$j m_0 = j \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \alpha \frac{Z_0(j \alpha/a)}{Z_1(j \alpha/a)}. \quad (\text{II. 6})$$

Da die Felder in die Tiefe des Plasmas hinein für große negative y exponentiell verschwinden müssen, kommt für $y < 0$ als Lösung nur die Hankelsche Funktion 2. Art in Frage. Andererseits läßt sich Gl. (II. 6) nur für Hankelsche Funktionen 1. Art erfüllen, die also für $y > 0$ zu verwenden sind. Dies stört die Stetigkeit von E_x und H_z bei $y = 0$ nicht, da beide Hankelsche Funktionen in gleicher Weise dort ∞ werden. $H_0^1(x) \rightarrow H_0^2(-x)$ für $x \rightarrow 0$, während E_y rechts und links von der Stelle $x = 0$ entgegengesetztes Vorzeichen hat, $H_1^1(x) \rightarrow -H_1^2(-x)$ für $x \rightarrow 0$.

Man setzt also für $0 < y < 1/a$

$$H_z = y A H_1^1(j \alpha y), \quad E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_0^1(j \alpha y),$$

$$E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_1^1(j \alpha y)$$

und für $y < 0$

$$H_z = y A H_1^2(j \alpha y), \quad E_x = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_0^2(j \alpha y),$$

$$E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0 a} A H_1^2(j \alpha y).$$

Aus diesen Ansätzen folgt, daß für $y \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, H_z dem Wert A/ja zustrebt, während die elektrischen Felder theoretisch ∞ groß werden, d. h. bei der stets vorhandenen Dämpfung einem Maximalwert zustreben. Da aber E_x nur logarithmisch ∞ wird, E_y dagegen wie $1/y$, ist nahe $\varepsilon = 0$, E_y sehr groß gegen

E_x , so daß die Kraftlinien die Stelle $y = 0$ praktisch senkrecht, parallel zu y durchsetzen. Außerdem hat E_y oberhalb und unterhalb von $y = 0$ entgegengesetztes Vorzeichen und nimmt nach beiden Seiten sehr viel rascher ab als E_x . Es führt dies zu einem Verlauf der Kraftlinien, wie in Abb. 2 skizziert, und wie er nach Arbeit¹ auch zu erwarten ist.

Bei $y = 0$ bilden sich starke pulsierende Raumladungen, die durch die gegenphasigen Verschiebungen der Elektronen beiderseits von $y = 0$ erzeugt werden.

Die Grenzbedingung (II. 6) heißt dann

$$j_0 m = j \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \alpha \frac{H_0^1(j \alpha/a)}{H_1^1(j \alpha/a)},$$

aus der zu jedem ω das zugehörige α bestimmt werden kann, wobei $\alpha^2 \gg \omega^2/c^2$ vorausgesetzt ist. Fragt

Abb. 2.

man speziell nach großen Werten von α , $\alpha \rightarrow \infty$, $v_p \rightarrow 0$, so ergibt sich für große z mit

$$H_0^1(jz) = -j \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} z}} \left(1 - \frac{1}{8z}\right),$$

$$H_1^1(jz) = -\frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{\pi}{2} z}} \left(1 + \frac{3}{8z}\right),$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{8} \alpha^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Mit wachsendem α muß auch ω wachsen. Mit $a = k/\omega^2$ (II. 5) ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{5}{8} \frac{k}{\omega^2} \alpha^2 + \frac{k^2}{\omega^4}$$

oder

$$\frac{\omega}{c} \approx \sqrt[4]{\frac{5}{8} \frac{k \alpha}{c^2}}$$

und die Phasengeschwindigkeit wird

$$v_p = \frac{\omega}{\alpha} \approx c \sqrt[4]{\frac{5}{8} \frac{k}{\alpha^3 c^2}}.$$

Es gibt auch in diesem Fall mit $a \rightarrow \infty$ eine ausgeprägte Grenzflächenwelle mit sehr stark abfallenden Feldern oberhalb und unterhalb von $y = 0$, $\varepsilon = 0$, und von sehr geringer Phasengeschwindigkeit. Nur tritt sie hier erst bei sehr hohen Frequenzen auf. Je steiler die Plasmadichte ansteigt, desto größer wird v_P bei gegebenem a .

Abb. 3. P Plasma konstanter Dichte, S Übergangsschicht, L Luft.

Für den Fall, daß die mit abnehmendem y anwachsende Plasmadichte schließlich wieder konstant wird, genügt die angegebene Näherung nicht zur Befriedigung der Grenzbedingungen. Dagegen können wir in diesem Fall eine andere Näherung verwenden, die einen gewissen Einblick in die Verhältnisse gibt. Führt man in die Differentialgleichung 4 als neue unabhängige Variable $u = ay = \varepsilon$ ein, so entsteht

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial u^2} - \frac{1}{u} \frac{\partial H_z}{\partial u} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} u - a^2 \right) H_z = 0.$$

Ist nun a^2 genügend viel größer als $u\omega^2/c^2 - a^2$, so kann das letzte Glied dieser Gleichung vernachlässigt werden, und man erhält

$$H_z = C_1 \frac{u^2}{2} + C_2, \quad E_x = -j \frac{C_1}{\omega \varepsilon_0},$$

$$E_y = \frac{\alpha}{\omega \varepsilon_0} \left(C_1 \frac{u}{2} + \frac{C_2}{u} \right).$$

Es ist jetzt E_x in der Übergangsschicht konstant, H_z wächst symmetrisch zu $u = 0$ und E_y ist antisymmetrisch zu $u = 0$ und geht für $u \rightarrow 0$ gegen ∞ .

Nimmt man nun einen Plasmaverlauf nach Abb. 3 an, d. h. von $u = 1$ bis $u = -u_1$ einen linearen Verlauf der Dielektrizitätskonstante von 1 über 0 bis $-u_1$, und daran anschließend ein Plasma konstanter Dichte mit der Dielektrizitätskonstante ($-u_1$), so gilt innerhalb der Luft für $u > 1$

$$H_z = A_0 e^{-m_0 y}, \quad E_x = j \frac{m_0}{\omega \varepsilon_0} A_0 e^{-m_0 y}$$

und im homogenen Plasma für $u < -u_1$, mit $u_1^2 = \varepsilon_P^2$,

$$H_{z_1} = A_1 e^{m_1 y}, \quad E_{x_1} = -j \frac{m_1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_P} A_1 e^{m_1 y}$$

mit

$$\varepsilon_P = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad m_0^2 = a^2 - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad m_1^2 = a^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_P,$$

$$m_1^2 - m_0^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}.$$

Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen bei $u = 1$ und $u = -u_1$

$$m_0 = -\frac{C_1}{\frac{C_1}{2} + C_2} \quad \text{und} \quad \frac{m_1}{\varepsilon_P} = \frac{C_1}{C_1 \frac{u_1^2}{2} + C_2}$$

oder

$$\frac{1}{m_0} + \frac{\varepsilon_P}{m_1} = \frac{\varepsilon_P^2 - 1}{2}.$$

Da positives $\varepsilon_P < 1$ ist, ist diese Gleichung für positive m_0 und m_1 nur für negatives ε_P lösbar. In dem homogenen Plasma ist $\omega^2 < \omega_0^2$. Mit $-\varepsilon_P = \varepsilon_P'$ ist dann

$$m_0 = \frac{1}{(\varepsilon_P'^2 - 1)2 + \varepsilon_P'/m_1}.$$

Diese Beziehung ist in Abb. 4 als Kurve 1 graphisch dargestellt.

Da außerdem die Beziehung $m_1^2 - m_0^2 = \omega_0^2/c^2$ gilt (Abb. 4, Kurve 2), gibt der Punkt P die zusammengehörigen Werte von m_0 und m_1 an.

Abb. 4.

Man sieht, daß nur $\varepsilon_P' > 1$ mögliche Werte ergibt, d. h. $\omega_0^2/\omega^2 > 2$, und daß große m_0 und m_1 nur für ε_P' nahe an 1 auftreten. Allerdings gilt die Lösung nur unter der Bedingung

$$a^2 \gg \left| \frac{\omega^2}{c^2} u - a^2 \right|,$$

die sich auch als

$$a^2 \gg \left| \frac{\omega_0^2}{c^2} + m_0^2 \right|$$

schreiben läßt. Für m_0 sehr groß, muß auch a sehr groß werden, d. h. für die Grenzflächenwelle $a \rightarrow \infty$, $m_0 \rightarrow \infty$ geht auch $a \rightarrow \infty$, d. h. wir kommen in diesem Fall wieder auf die homogene und unstetig in Luft übergehende Plasmaschicht zurück. Ob eine Grenzflächenwelle bei endlicher Frequenz auch bei einer Übergangsschicht (a endlich) auftritt, kann demnach diese Näherungslösung nicht entscheiden. Da

$\alpha^2 = m_0^2 + \omega^2/c^2$ ist, treten Phasengeschwindigkeiten

$$v_p^2 = c^2 \frac{1}{1 + m_0^2 c^2/\omega^2}$$

kleiner als die Lichtgeschwindigkeit auf, die um so kleiner sind, je größer m_0 ist und um so rascher auf beiden Seiten der Übergangsschicht abfallen, je größer m_0 und m_1 sind.

Über die Beugung von Rohrwellen an ebenen Blenden

VON ROLF MÜLLER

Aus dem Institut für theoretische Physik der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 5 a, 617–621 [1950]; eingegangen am 12. Oktober 1950)

Im ersten einleitenden Abschnitt werden bekannte Beziehungen, die für das Folgende notwendig sind, zusammengestellt. Im zweiten Abschnitt wird das Beugungsproblem für Rohrwellen an ebenen Blenden allgemein formuliert. Im dritten Abschnitt wird für den speziellen Fall der konzentrischen Lochblende im kreiszylindrischen Rohr gezeigt, daß die Beugung einer einfallenden zylindersymmetrischen E - bzw. H -Welle durch E - bzw. H -Wellen allein beschrieben wird, also an der Blende keine Umwandlungen von E - in H -Wellen auftreten, während bei einer einfallenden E - bzw. H -Welle die vom Azimut φ abhängt, zur Beschreibung der Beugung beide Wellentypen notwendig sind, also Umwandlungen auftreten.

I.

Bekanntlich läßt sich jeder mit der Frequenz ω periodische, elektromagnetische Feldzustand in einem ideal leitenden Hohlrohr durch 2 skalare Felder $e(\xi, \eta, z)$ und $h(\xi, \eta, z)$ in folgender Weise ausdrücken¹:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathfrak{E} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} e + k \text{ grad}' h \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' e) e^{i\omega t}, \\ i \nabla^2 \mathfrak{H} &= (\text{grad}' \frac{\partial}{\partial z} h + k \text{ grad}' e \times \mathfrak{z} \\ &\quad - \mathfrak{z} \text{ div grad}' h) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Striche an den Differentialoperatoren deuten an, daß in einer Querschnittsfläche $z = \text{const.}$, also nur nach den Koordinaten ξ, η der Querschnittsfläche zu differenzieren ist. $\mathfrak{z}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Rohrachse, Π und Δ sind die Materialkonstanten des Dielektrikums im Rohr und $k = \omega \sqrt{\Pi \Delta}$ die Wellenzahl. Die Potentiale e und h müssen im Inneren des Hohlrohrs den Wellengleichungen:

$$\Delta e + k^2 e = 0, \quad \Delta h + k^2 h = 0 \quad (2)$$

und auf dem Rohrmantel den Randbedingungen

$$e = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

genügen. Man verifiziert leicht, daß die durch die Gln. (1) bis (3) definierten Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im Inneren des Rohres den Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} = i \omega \Pi \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = -i \omega \Delta \mathfrak{E} \quad (4)$$

genügen und auf dem Rohrmantel die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}_t$ verschwindet. Man bezeichnet Schwingungszustände mit verschwindendem Potential h als Schwingungen vom elektrischen Typus und solche mit verschwindendem Potential e als Schwingungen vom magnetischen Typus. Die allgemeinsten Lösungen der Gln. (2) lauten

$$\begin{aligned} e &= \sum_v \left(a_v^{(e)} e^{i\gamma_v^{(e)} z} + b_v^{(e)} e^{-i\gamma_v^{(e)} z} \right) \varphi_v, \\ h &= \sum_v \left(a_v^{(h)} e^{i\gamma_v^{(h)} z} + b_v^{(h)} e^{-i\gamma_v^{(h)} z} \right) \psi_v. \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei bedeuten die $a_v^{(e)}, b_v^{(e)}, a_v^{(h)}, b_v^{(h)}$ willkürliche komplexe Konstanten, mit denen man die Lösung vorgegebenen Randbedingungen anpassen kann. Die φ_v, ψ_v , die nur von den Koordinaten ξ, η der Quer-

¹ Siehe etwa E. R u c h, Ann. Physik 7, 248 [1950].