Eigenwerte pro Energieintervall. Wie oben in (5) bleiben also die Beziehungen der Fermi-Statistik ohne Wechselwirkung formal erhalten. Wenn die Verteilung für $T = 0$ aus mehreren getrennten Stücken besteht, dann setzt sich die spezifische Wärme in der

Näherung der Gl. (11) additiv aus den Beiträgen der einzelnen „Oberflächen“ [die ja alle Lösungen derselben Gleichung $\eta(\varepsilon, 0) = \zeta$ sind] zusammen. Für die Ableitung $d\eta/d\varepsilon$ ist dann immer der absolute Betrag einzusetzen.

Zum Formalismus linearer Feldtheorien II

Von HELMUT STEINWEDEL

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. 6a, 519—522 [1951]; eingegangen am 4. Juni 1951)

Für die in einer vorangehenden Arbeit untersuchten verallgemeinerten Feldgleichungen werden die zugehörigen Lagrange-Funktionen sowie die Vertauschungsrelationen angegeben. Während die Quantisierung von Bose-Feldern keine Schwierigkeiten bietet, ist die Quantisierung von Fermi-Feldern im Rahmen des vorliegenden Formalismus nicht möglich.

In einer vorangehenden Arbeit¹ wurden die von Bopp und Feynman entwickelten linearen Verallgemeinerungen der klassischen Elektrodynamik näher untersucht. Es wurde unter anderem gezeigt, daß die Methoden von Bopp² und Feynman³ prinzipiell auf beliebige Feldtypen anwendbar sind; ferner ergab sich ein enger Zusammenhang mit der von Pauli und Villars⁴ beschriebenen Methode der Regularisation. Üblicherweise werden nun die Feldgleichungen durch Variation aus einer Lagrange-Funktion hergeleitet; dieses Verfahren hat den Vorteil, daß man aus der Lagrange-Funktion in einfacher Weise die kanonisch konjugierten Feldgrößen erhält, die man zur Aufstellung der Vertauschungsrelationen bei der Quantisierung benötigt⁵. In der vorliegenden Arbeit soll daher gezeigt werden, daß die Aufstellung der Lagrange-Funktion und damit die Quantisierung für die in I untersuchten Feldtheorien sich zwanglos in den dort entwickelten Formalismus einfügt, soweit es sich um Bose-Felder handelt.

A) Die Lagrange-Funktion⁶

Zur Demonstration der Methode beschränken wir uns zunächst auf den einfachen Fall eines skalaren geladenen (komplexen) Feldes mit den Feldfunktionen φ, φ^* , dessen Quanten die Ruhmasse $m = \hbar \sqrt{\eta}/c$

haben mögen. Die übliche Lagrange-Funktion lautet, wenn j (bzw. j^*) die (räumlich verteilten) Quellen des Feldes sind⁷

$$L(\eta) = -c^2 \left\{ \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + \eta \varphi^* \varphi \right\} - 4\pi c^2 \{ \varphi^* j + \varphi j^* \}. \quad (1)$$

Daraus ergeben sich aus $\delta \int L d\tau = 0$ in üblicher Weise die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \square \varphi - \eta \varphi &= -4\pi j, \\ \square \varphi^* - \eta \varphi^* &= -4\pi j^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Dabei ist zu beachten, daß $j(x)$ eine vorgegebene Raum-Zeit-Funktion ist und die Lösungen φ und φ^* von (2) außer von $j(x)$ natürlich auch von η abhängen.

Die Feldgleichungen der verallgemeinerten Theorie lauten nach I (10), (11) und (14) anstatt (2)

$$D(\square) \psi(x) = -4\pi j(x) \quad (= (\square - \eta) \varphi(x, \eta)), \quad (3)$$

wobei nach I (13), (22), (Z. 6)

$$\psi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, \eta) \varrho(\eta) d\eta \quad (4)$$

ist. Die Auflösung von (2) lautet

¹ H. Steinwedel, Z. Naturforschg. 6a, 123 [1951], im folgenden mit I zitiert.

² F. Bopp, Ann. Physik 42, 573 [1943].

³ R. P. Feynman, Physic. Rev. 74, 939 [1948].

⁴ W. Pauli u. F. Villars, Rev. mod. Physics 21, 434 [1949].

⁵ Vgl. dazu z. B. G. Wentzel, Quantentheorie der Wellenfelder, Verlag F. Deuticke, Wien 1943.

⁶ Die Notation der vorliegenden Arbeit schließt sich ebenfalls an I an: Die vierdimensionalen Koordinaten sind $x_1 = x^1, x_2 = x^2, x_3 = x^3, x_4 = -x^4$ (= Zeit mal Lichtgeschwindigkeit); über doppelte Indizes ist in üblicher Weise zu summieren, ferner ist $d\tau$ das (vierdimensionale) Volumenelement und $d\sigma_\nu$ das (dreidimensionale) Oberflächenelement.

⁷ Vgl. Wentzel⁵.

$$\varphi(x, \eta) = -4\pi \{ \square - \eta \}^{-1} j(x), \quad (5)$$

wo $\{ \square - \eta \}^{-1}$ der inverse Operator zu $(\square - \eta)$ ist⁸. Daraus ergibt sich nach (4)

$$\psi(x) = -4\pi \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \{ \square - \eta \}^{-1} j(x) \quad (6)$$

und somit aus (3) und (6)

$$\{ D(\square) \}^{-1} = \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \{ \square - \eta \}^{-1} \quad (7)$$

in Übereinstimmung mit I (20).

Im Anschluß an (4) und (7) liegt es nahe, für die *Lagrange-Funktion* $\mathfrak{L}$ der verallgemeinerten Theorie folgenden Ansatz zu machen:

$$\mathfrak{L} = \int_0^\infty L(\eta) \varrho(\eta) d\eta, \quad (8)$$

denn wegen

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} = \varphi^* \square \varphi - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \right) \quad (9)$$

ergibt sich aus (1) und (8)

$$\int \mathfrak{L} d\tau = c^2 \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \cdot \left\{ \int \varphi^* (\square \varphi - \eta \varphi + 4\pi j) d\tau - \oint \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} d\sigma^\nu \right\} \quad (10)$$

Bei der Variation verschwindet das Oberflächenintegral, und es wird nach (2), (3) und (4)

$$\delta \int \mathfrak{L} d\tau = c^2 \int \delta \varphi^* \{ D(\square) \psi + 4\pi j \} d\tau = 0. \quad (11)$$

Umgekehrt folgt also aus der verallgemeinerten Lagrange-Funktion (8) zusammen mit (1) und (4) die Feldgleichung (3) mit (7).

Aus (3) und (9) gewinnt man in einfacher Weise den Ausdruck für den Viererstrom der verallgemeinerten Theorie. Es ist nämlich nach (9):

$$\begin{aligned} \varphi^* (\square - \eta) \varphi - \varphi (\square - \eta) \varphi^* \\ = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \varphi \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

und nach (3)

$$\begin{aligned} \varphi^* D(\square) \psi - \varphi D(\square) \varphi^* \\ = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \varphi \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

⁸ Der inverse Operator ist natürlich nicht eindeutig definiert, da auch die homogene Gleichung $(\square - \eta) \varphi = 0$ Lösungen besitzt. Dies ist jedoch für das Weitere belanglos, da dann auch die homogene Gleichung $D(\square) \psi = 0$ nach (4) eine φ entsprechende Lösung hat.

Daraus ergibt sich wegen (3)⁹

$$\varphi^* D(\square) \psi - \psi D(\square) \varphi^* = \frac{\partial}{\partial x_\nu} S_\nu \quad (14)$$

mit

$$S_\nu = \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \left\{ \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \varphi \right\}. \quad (15)$$

Genügen ψ (bzw. φ^*) der homogenen Feldgleichung $D(\square) \psi = 0$, so verschwindet die linke Seite von (14) und $-ie S_\nu = s_\nu$ ist der Viererstrom, der der üblichen Kontinuitätsgleichung $(\partial/\partial x_\nu) s_\nu = 0$ genügt. Die Vorschrift (15) garantiert somit die Eichinvarianz der Theorie, während z. B. der Ausdruck

$$\varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^\nu} \psi$$

sicherlich keiner Kontinuitätsgleichung genügt¹⁰.

Die Analoga $\bar{f}$, f und $f^{(1)}$ zu den von Schwinger¹¹ eingeführten invarianten Funktionen $\bar{A}$, A und $A^{(1)}$ lassen sich nach (3) und (4) sofort angeben. Nach (3) ist¹²

$$\begin{aligned} D(\square) \bar{f}(x) &= (\square - \eta) \bar{A}(x, \eta) = -\delta(x) \\ &(\equiv \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(x_4)), \\ D(\square) f(x) &= (\square - \eta) A(x, \eta) = 0, \\ D(\square) f^{(1)}(x) &= (\square - \eta) A^{(1)}(x, \eta) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

und nach (4)

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \bar{A}(x, \eta), \\ f(x) &= \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) A(x, \eta), \\ f^{(1)}(x) &= \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) A^{(1)}(x, \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

⁹ Vgl. dazu auch I (Z. 1), (Z. 10).

¹⁰ Mit einem derartigen Stromausdruck (bzw. einem äquivalenten für Spinorfelder) berechnete Resultate können daher auch nicht eichinvariant sein, vgl. z. B. R. P. Feynman, *Physic. Rev.* **76**, 769 [1949], oder W. Heisenberg, *Z. Naturforsch.* **5a**, 251 [1950]. Auf die fehlende Eichinvarianz der Heisenbergschen Theorie hat R. Jost, (vgl. M. Fierz, *Helv. physica Acta* **23**, 731 [1950]) hingewiesen.

¹¹ J. Schwinger, *Physic. Rev.* **75**, 651 [1949] Appendix.

¹² Die Funktion $\bar{f}(x)$ wurde in I mit $f(\Gamma)$ bezeichnet.

B) Quantisierung¹³

Der Kürze halber beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf ein reelles Feld. Zunächst führen wir das kanonisch konjugierte Feld ein gemäß¹⁴

$$\pi(x, \eta) = \frac{\partial L(\eta) \varrho(\eta)}{\partial \dot{\varphi}(x, \eta)} = \dot{\varphi}(x, \eta) \varrho(\eta). \quad (18)$$

Dann lauten die Vertauschungsrelationen bei trivialer Verallgemeinerung des gewohnten

$$[\pi(r, \eta), \varphi(r', \eta')] = \frac{\hbar}{i} \delta(\eta - \eta') \delta(r - r') \quad (19)$$

oder nach (18)

$$[\dot{\varphi}(r, \eta), \varphi(r', \eta')] = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta(\eta - \eta')}{\varrho(\eta)} \delta(r - r'). \quad (20)$$

Daraus erhalten wir durch Multiplikation mit $\varrho(\eta) \varrho(\eta')$ und Integration über η und η' unter Berücksichtigung von (4)

$$[\dot{\psi}(r), \psi(r')] = \frac{\hbar}{i} \delta(r - r') \int_0^\infty \varrho(\eta') d\eta'. \quad (21)$$

Hier verschwindet die rechte Seite, wenn $\varrho(\eta)$ den Regularisierungsbedingungen I (32) genügt. Die kovarianten Vertauschungsrelationen ergeben sich sofort aus (20) und (4) nach dem Verfahren von Schwinger¹⁵ zu

$$[\psi(x), \psi(x')] = \frac{i\hbar}{c} f(x - x'), \quad (22)$$

woraus wiederum (21) als Spezialfall folgt.

 C) Die Funktion $\varrho(\eta)$

Die Funktion $\varrho(\eta)$ muß, wenn die Theorie divergenzenfrei sein soll, den Bedingungen

$$\int_0^\infty \eta^m \varrho(\eta) d\eta = 0; \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

genügen, vgl. I (32). Dabei ist n mindestens so groß zu wählen, daß sämtliche Integrale der Störungsrechnung konvergieren; n hängt daher bis zu einem gewissen Grade noch von der im Einzelfall zu be-

¹³ Vgl. dazu auch A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **79**, 145 [1950], wo die Quantisierung für eine spezielle Klasse verallgemeinerter Feldgleichungen analog durchgeführt wurde.

¹⁴ Ein Punkt bedeutet partielle Ableitung nach der Zeit.

¹⁵ J. Schwinger, Physic. Rev. **74**, 1439 [1948].

¹⁶ Für die Quantenelektrodynamik ist $n = 1$ ausreichend, vgl. Pauli und Villars⁴.

¹⁷ Vgl. dazu Wentzel⁵. Hier ist $j \equiv 0$ gesetzt.

¹⁸ Vgl. dazu z.B. Feynman³ oder H. Lehmann, Ann. Physik (6) **8**, 109 [1950].

trachtenden speziellen Theorie ab¹⁶. Da $\varrho(\eta)$ wegen (23) nicht positiv definit sein kann, wird auch die zur Lagrange-Funktion (8) gehörende Hamilton-Funktion¹⁷

$$H = \int_0^\infty d\eta \varrho(\eta) \cdot \{ \dot{\varphi}^* \dot{\varphi} + c^2 (\text{grad } \varphi^* \text{ grad } \varphi) + c^2 \eta \varphi^* \varphi \} \quad (24)$$

nicht positiv definit. Dieser Nachteil wird aber dadurch irrelevant, daß man durch geeignete Wahl von $\varrho(\eta)$ dafür sorgen kann, daß in Emissionsprozessen keine Quanten negativer Energie emittiert werden¹⁸. Sollen nur freie Quanten mit der Ruhmasse $m = \mu \hbar/c$ auftreten, so muß

$$\varrho(\eta) = \delta(\eta - \mu^2) - \chi(\eta) \quad (25)$$

sein, wobei $\chi(\eta)$ eine stetige Funktion ist und wegen (23) den Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta^l \chi(\eta) d\eta &= \mu^{2l} \quad (l = 1, 2, \dots, n), \\ \int_0^\infty \chi(\eta) d\eta &= 1 \end{aligned} \quad (26)$$

genügt. Der Anteil $\delta(\eta - \mu^2)$ von $\varrho(\eta)$ würde für sich allein die gewöhnliche Theorie liefern. Andererseits ist es für stetiges $\chi(\eta)$ evident¹⁹, daß das sich aus $\chi(\eta)$ nach (4) ergebende Strahlungsfeld im Unendlichen stärker verschwindet als das Strahlungsfeld der bisherigen Theorie, so daß nur das letztere in größeren Entfernungen von den Quellen vorhanden ist. Soll dies auch für das statische Feld gelten, so muß

¹⁹ Dies läßt sich wie folgt zeigen: Zur Berechnung der Feldfunktionen im quellenfreien Raum ergeben sich Integrale der Form

$$\int_0^{\omega^2} \frac{e^{-ir\sqrt{\omega^2 - \eta}}}{\eta} \chi(\eta) d\eta.$$

Setzen wir $\sqrt{\omega^2 - \eta} = z$, so ist aber

$$\begin{aligned} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} z \frac{e^{-irz}}{r} dz &= \frac{i}{r} \frac{d}{dr} \int_{z-\Delta z}^{z+\Delta z} e^{-irz} dz \\ &= -\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{irz} \sin(r\Delta z)}{r} \end{aligned}$$

d. h. die Feldfunktionen verschwinden im Unendlichen sicher stärker als $1/r$, m. a. W. die in (24) auftretenden negativen Energien werden nicht ausgestrahlt. Ähnlich liegen die Dinge im statischen Fall, wenn man (27) berücksichtigt, da im statischen Fall die entsprechenden Felder wie $\exp(-r\sqrt{\eta})/r^2$ abfallen.

$$\chi(\eta) \equiv 0 \quad \text{für} \quad \eta < \mu^2 \quad (27)$$

sein. Der Zusammenhang des hier beschriebenen Formalismus mit der von Pauli und Villars beschriebenen Regularisation mit kontinuierlichem Massenspektrum ist evident. Im Gegensatz zu den genannten Autoren soll jedoch in dem hier beschriebenen Formalismus die Regularisierung „real“ aufgefaßt werden, d. h. der von Pauli und Villars nach Abseparation der Renormalisationsterme durchgeführte Grenzübergang $\chi(\eta) \rightarrow 0$ für $\eta < \infty$ ist nicht durchzuführen.

Wie jedoch Pauli²⁰ zeigte, begegnet die reale Regularisierung bei Fermi-Feldern ernsthaften Schwierigkeiten²¹. Da die Paulische Argumentation nicht allgemein bekannt zu sein scheint, soll sie im folgenden kurz skizziert werden.

D) Spinor-Felder

Für ein Spinor-Feld ist statt (1)²²

$$L(\eta) = -\hbar c \varphi^+(\eta, x) \{ \nabla + \sqrt{\eta} \} \varphi(\eta, x) \quad (28)$$

zu setzen; die verallgemeinerte Lagrange-Funktion ist unter Berücksichtigung von (28) wie bisher durch (8) gegeben. Das kanonisch konjugierte Feld ergibt sich zu

$$\pi_a = \frac{\partial L(\eta)}{\partial \varphi_a(x, \eta)} = -\frac{\hbar}{i} \varphi_a^*(x, \eta) \varphi(\eta). \quad (29)$$

In den Vertauschungsrelationen sind die Kommutatoren durch Antikommutatoren zu ersetzen, so daß wir statt (19)

$$\{\pi_a(\mathbf{r}, \eta), \varphi_\beta(\mathbf{r}', \eta')\} = -\frac{\hbar}{i} \delta_{a\beta} \delta(\eta - \eta') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (30)$$

erhalten. Daraus ergibt sich wegen (29)

$$\{\varphi_a^*(\mathbf{r}, \eta), \varphi_\beta(\mathbf{r}', \eta')\} = \delta_{a\beta} \frac{\delta(\eta - \eta')}{\varphi(\eta)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (31)$$

Wie oben erhalten wir für die analog zu (4) definierten verallgemeinerten Spinoren ψ

$$\{\psi_a^*(\mathbf{r}), \psi_\beta(\mathbf{r}')\} = \delta_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_0^\infty \varphi(\eta') d\eta'. \quad (32)$$

Wegen der Regularisierungsbedingungen (23) verschwindet jedoch die rechte Seite, so daß auch

$$\psi_a^*(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}) + \psi_a(\mathbf{r}) \psi_a^*(\mathbf{r}) \equiv 0 \quad (33)$$

sein muß. Da jedoch $\psi_a^* \psi_a$ sowie $\psi_a \psi_a^*$ positiv definite Operatoren sind, folgt daraus das unsinnige Resultat, daß ψ und ψ^* identisch verschwinden müssen.

²⁰ W. Pauli, unveröffentlicht. Vgl. dazu auch Pais und Uhlenbeck¹³.

²¹ Für einen diesbezüglichen Hinweis bin ich Herrn Wildermuth, Göttingen, zu Dank verpflichtet.

²² Vgl. Wentzel⁵. Es ist

$$\nabla = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma_\mu) = \delta_\mu^\nu; \quad \varphi^+ = \varphi^* \gamma_4$$

ist der zu φ adjungierte, φ^* der zu φ hermitesch konjugierte Spinor.

Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse II*

Von ROLF HAASE

Aus dem Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Marburg (Lahn)

(Z. Naturforschg. 6a, 522—540 [1951]; eingegangen am 15. Mai 1951)

Für den Gültigkeitsbereich der linearen phänomenologischen Ansätze lassen sich aus dem (erweiterten) Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und den Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen folgende Sätze ableiten, die Verallgemeinerungen der Überlegungen von Prigogine darstellen:

1. Es gibt bei offenen homogenen Systemen, in denen sich chemische Reaktionen abspielen, stationäre Nichtgleichgewichtszustände, die sich durch ein Minimum der Entropieerzeugung in bezug auf (wirklich durchlaufene) Nachbarzustände auszeichnen.

2. Nichtgleichgewichtszustände in geschlossenen polythermen Systemen, die durch ein Minimum der Entropieerzeugung in bezug auf (wirklich durchlaufene) Nachbarzustände ausgezeichnet sind, entsprechen stationären Zuständen.

3. Nichtgleichgewichtszustände in geschlossenen kontinuierlichen Systemen, die durch ein Minimum der lokalen Entropieerzeugung in bezug auf (wirklich durchlaufene) Nachbarzustände ausgezeichnet sind, entsprechen stationären Zuständen ohne Ablauf chemischer Reaktionen.

Präzisiert man diese Sätze durch Angabe der (physikalisch realisierbaren) Nebenbedingungen und schließt (zur Verallgemeinerung der Formulierung) chemische Reaktionen aus, so erhält

* Ergänzte Fassung eines Teils der Habilitationsschrift, Marburg 1950.