$$a_{n+1} = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{2(n+1)} a_n,$$

und man erhält, ausgehend von $a_0 = 1$, das allgemeine a_n :

$$a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}{2^n n!} = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{8^n n!}.$$

Dies ist identisch mit dem allgemeinen Koeffizienten der Entwicklung (16), und die nach (8) aus den u_n

aufgebaute Lösung

$$u = \frac{A}{\sqrt{r}} \left[1 + \frac{1}{8} (ikr)^{-1} + \dots + a_n (ikr)^{-n} + \dots \right] e^{ik(r+C)} \quad (18)$$

ist daher dieselbe wie die asymptotische Entwicklung (16) der geschlossenen Lösung (15), wobei nur $C = -\pi/4k$ gesetzt werden muß und die Konstante A eine etwas geänderte Bedeutung hat.

Über Funktionen von Delta-Funktionen*

Von B. GROSS

Instituto Nacional de Tecnologia, Rio de Janeiro, Brasilien

(Z. Naturforsch. 6a, 676–679 [1951]; eingegangen am 16. Juni 1951)

Erich Regener zum 70. Geburtstag

Es wird eine Verallgemeinerung einer bekannten Darstellung der Delta-Funktion gegeben. Die physikalische Bedeutung der neuen Gleichung wird diskutiert. Es ergibt sich, daß sie für recht allgemeine Vorgänge Gültigkeit beanspruchen kann.

Die Nützlichkeit der Diracschen Delta-Funktion hat sich bereits vielfach erwiesen. Zahlreiche Formeln und Darstellungen für diese Funktion, die teils auf empirischem, teils auf analytischem Weg erhalten wurden, sind bekannt. Eine sehr ausführliche Zusammenfassung findet sich etwa bei van der Pol und Bremmer¹. Bei der Untersuchung von elastischen und elektrischen Nachwirkungsvorgängen² und in der Theorie linearer elektrischer Schaltungen sind wir nun auf eine ganz neuartige Beziehung gestoßen, welche recht allgemeine Gültigkeit zu besitzen scheint. Eine eingehendere Diskussion ist daher von Interesse. Die im speziellen Fall zugrunde liegenden physikalischen Probleme sowie eine etwas einschränkende Fassung sind bereits in den Arbeiten von Pelzer und Gross* enthalten. Hier soll eine allgemeinere Ableitung auf Grund einer von van der Pol und Bremmer aufgestellten Formel gegeben werden. Dazu wird zunächst allgemein der Typ des physikalischen Pro-

blems gekennzeichnet, für welchen die Formel von Bedeutung sein kann. Dann folgt eine kurze Zusammenstellung bekannter Formeln, auf Grund derer dann die Ableitung der neuen Gleichung erfolgt. Schließlich wird ihre Anwendung an einem Beispiel gezeigt.

I. Beziehungen zwischen Verteilungsfunktionen

Es seien 2 Größen $A(t)$ und $Z(t)$ gegeben, zwischen denen eine eindeutige physikalische Beziehung bestehen soll:

$$A(t) = F[Z(t)]. \quad (1)$$

Die beiden Funktionen A und Z sollen nun gleichzeitig bestimmt sein durch die Werte der Verteilungsfunktionen r_a und r_b eines Parameters p .

$$A(t) = Y[t, r_a(p)], \quad (2a)$$

$$Z(t) = Y[t, r_b(p)]. \quad (2b)$$

* Die vorliegende Arbeit ist aus Bemerkungen von Herrn Dr. H. Pelzer von der „British Electrical and Allied Research Association“ in London entstanden. Sie stellt eine Weiterführung zweier zusammen mit Herrn Dr. Pelzer gemachten Arbeiten dar, von denen eine bereits als „Technical Report“ L/T 264 der El. Res. Ass. erschienen ist, während die andere den Proc. Cambridge Philos. Soc. zur Veröffentlichung vorliegt.

¹ B. van der Pol and H. Bremmer, Operational Calculus, Cambridge University Press 1950, pag. 56–81.

² B. Gross, J. appl. Physics 18, 212 [1947]; 19, 257 [1948]; B. Gross and H. Pelzer, ebenda 22 [1951].

Das Bestehen der Gl. (1) hat dann eine Beziehung zwischen r_a und r_b zur Folge:

$$r_a(p) = \Phi[h(p), r_z(p)]. \quad (3)$$

Der allgemeinste Fall wird der eines kontinuierlichen Verteilungsspektrums sein. Man muß aber zulassen, daß ein solches zu einem diskontinuierlichen Spektrum ausartet. Aus physikalischen Gründen ist dann in manchen Fällen zu schließen, daß, wenn eine der Verteilungen diskontinuierlich wird, dies auch für die andere zutrifft. Im Fall diskreter Spektren hat man also

$$r_a(p) = \sum k_i \delta(p - p_i), \quad (4a)$$

$$r_b(p) = \sum l_n \delta(p - p_n), \quad (4b)$$

wobei $\delta(p)$ eine Diracsche Delta-Funktion ist. Andererseits muß die Beziehung zwischen r_a und r_b durch (3) gegeben sein. Hieraus kann auf das Bestehen der folgenden allgemeinen Beziehung geschlossen werden:

$$\delta[h(p), \sum l_n \delta(p - p_n)] = \sum k_i \delta(p - p_i). \quad (5)$$

Im folgenden soll die Ableitung einer solchen Formel auf Grund der Theorie der Delta-Funktion gegeben werden. Zur Einfachheit wird allerdings vorausgesetzt, daß die Summe in (4b) sich auf einen einzigen Term reduziert. Man sieht aber, daß der allgemeinere Ausdruck nichts wesentlich Neues bietet.

II. Bekannte Formeln für Delta-Funktionen

a) Definitionsgleichungen. Wir betrachten eine Funktionenfolge $G(x, \varepsilon)$, wobei die Funktionen G von der Variablen x und dem Parameter ε abhängen. Die Funktionen G sollen nun den folgenden Bedingungen gehorchen:

$$\lim_{\varepsilon=0} G(x, \varepsilon) = 0, \quad x \neq 0, \quad (6a)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} G(x, \varepsilon) = \infty, \quad x = 0, \quad (6b)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\eta}^{\eta} G(x, \varepsilon) dx = 1, \quad \eta > 0. \quad (6c)$$

Wenn dies der Fall ist, so schreibt man symbolisch

$$\lim_{\varepsilon=0} G(x, \varepsilon) = \delta(x). \quad (7)$$

b) Darstellung der Delta-Funktion. Zahlreiche Funktionen genügen diesen Bedingungen.

Einen allgemeinen Ausdruck für sie alle anzugeben ist nicht möglich. Für unsere Zwecke genügt, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{K(x/\varepsilon)}{\varepsilon K_0} = \lim_{\varepsilon=0} G(x, \varepsilon) = \lim \delta(x), \quad (8)$$

wobei die Funktion $K(x)$ den Bedingungen genügen muß.

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = K_0, \quad (9a)$$

$$K(0) \neq 0. \quad (9b)$$

Das Integral (9a) soll im Unendlichen und im Nullpunkt absolut konvergieren, so daß also

$$K(x) \sim |x|^{-(1+\sigma)}, \quad \sigma > 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty, \quad (10a)$$

$$K(x) \sim |x|^{-(1-\sigma)}, \quad \sigma > 0 \text{ für } |x| \rightarrow 0. \quad (10b)$$

Für solche Funktionen läßt sich zeigen, daß die Gl. (6c) selbst für verschwindendes η gilt, vorausgesetzt, daß dieses genügend langsam gegen 0 geht. Es folgt nämlich, daß für jedes $G(x, \varepsilon)$ der Form (8)

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\eta(\varepsilon)}^{+\eta(\varepsilon)} G(x, \varepsilon) dx = 1, \quad (11a)$$

für jedes endliche oder mit ε gegen 0 gehende η , für das

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty. \quad (11b)$$

Dies bedeutet, daß $\eta(\varepsilon)$ so gegen 0 gehen muß, daß der „Buckel“ der Delta-Funktion innerhalb des Intervalls bleibt. Aus (10b) folgt weiterhin, daß für jede solche Funktion $G(x, \varepsilon)$ auch

$$\lim_{\varepsilon=0} G(x, \varepsilon) = 0, \quad x \neq 0. \quad (12)$$

c) Summen von Delta-Funktionen. Für das Folgende benötigen wir noch eine bekannte Summenformel. Es ist

$$\delta[h(x)] = \sum \frac{\delta(x - x_i)}{h'(x_i)}, \quad (13)$$

wobei die x_i diejenigen x -Werte sind, für welche die Funktion $h(x)$ ihr Vorzeichen ändert, also normalerweise die Nullstellen der Funktion. Es ist also auch

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{K[h(x)/\varepsilon]}{\varepsilon K_0} = \lim_{\varepsilon=0} G[h(x), \varepsilon] = \sum \frac{\delta(x - x_i)}{h'(x_i)}. \quad (14)$$

d) Glockenkurven. Wir wollen nun weiterhin speziell annehmen, daß die hier in Betracht kommenden Funktionen vom Typ der Glockenkurven

sind, wie dies wohl für die meisten in der Physik auftretenden Verteilungskurven zutrifft. Das heißt, es soll sich stets um solche Funktionsfolgen $G(x, \varepsilon)$ handeln, für die

$$G(x, \varepsilon) > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (15a)$$

$$\frac{dG(x, \varepsilon)}{dx} \geq x, \quad x \geq 0. \quad (15b)$$

Denselben Bedingungen unterliegt also auch die Funktion $K(x/\varepsilon)$.

III. Funktionen von Delta-Funktionen

Wir verallgemeinern die Darstellung (8), indem wir den Parameter ε seinerseits durch eine der Gl. (6)

Abb. 1.

gehorchende Funktion $G(x+a, \varepsilon)$ ersetzen mit $a > 0$. Die so erhaltene Funktion sei $F(x, \varepsilon)$:

$$F(x, \varepsilon) = \frac{1}{G(x+a, \varepsilon)} \frac{K[x/G(x+a, \varepsilon)]}{K_0}, \quad a > 0, \quad (16)$$

wobei für ε zur Einfachheit wieder ε gesetzt ist.

Der so gegebene Ausdruck soll nun untersucht werden. Man sieht zunächst leicht, daß unter den gegebenen Bedingungen (10)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = 0, \quad x \neq 0, \quad (17a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = \infty, \quad x = 0. \quad (17b)$$

Somit bleibt nur noch die Betrachtung des Integrals über F . Die gegenseitige Lage der Funktionen G und K ist in Abb. 1 dargestellt. Wir betrachten zunächst das Integral in der Umgebung von $x = 0$, innerhalb eines Intervalles $\pm \eta$. Wegen (15b) folgt

$$G(a-\eta, \varepsilon) \geq G(a+x, \varepsilon) \geq G(a+\eta, \varepsilon), \quad |x| \leq \eta \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} K[x/G(a+\eta, \varepsilon)] &\leq K[x/G(a+x, \varepsilon)] \\ &\leq K[x/G(a-\eta, \varepsilon)], \quad x \leq \eta \end{aligned} \quad (18b)$$

und hieraus, wenn man noch abkürzend setzt

$$G_+ = G(a+\eta, \varepsilon), \quad (19a)$$

$$G_- = G(a-\eta, \varepsilon), \quad (19b)$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{K[x/G_+]}{G_- K_0} dx \leq \int_{-\eta}^{\eta} F(x, \varepsilon) dx \leq \int_{-\eta}^{\eta} \frac{K[x/G_-]}{G_+ K_0} dx \quad (20)$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G_+}{G_-} \int_{-\eta/G_+}^{\eta/G_+} \frac{K(u) du}{K_0} &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\eta}^{\eta} F(x, \varepsilon) dx \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G_-}{G_+} \int_{-\eta/G_-}^{\eta/G_-} \frac{K(u) du}{K_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Alle 3 Grenzwerte werden gleich 1, wenn man $\eta(\varepsilon)$ so bestimmt, daß

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(\varepsilon) = 0, \quad (22a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(a+\eta, \varepsilon)}{G(a-\eta, \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(a-\eta, \varepsilon)}{G(a+\eta, \varepsilon)} = 1, \quad (22b)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(\varepsilon)}{G(a+\eta, \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta(\varepsilon)}{G(a-\eta, \varepsilon)} = \infty. \quad (22c)$$

Dies bedeutet wieder, daß man $\eta(\varepsilon)$ so gegen 0 gehen läßt, daß sich der ganze Buckel der Glockenkurve innerhalb des Intervalls befindet. In dem noch bleibenden Teilintegral

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\eta} + \int_{+\eta}^{+\infty} \right\} F(x, \varepsilon) dx, \quad (23)$$

ist der Integrand überall endlich und geht im ganzen Integrationsgebiet mit ε gegen 0. Im Unendlichen sind die Integrale wegen (10a) absolut konvergent. Es sei noch ausdrücklich bemerkt, daß der Integrand auch für $x = -a$ wegen (12) 0 wird; die unendlich kleine Umgebung dieses Punktes trägt übrigens in der Grenze einen verschwindenden Beitrag zum Integral. Somit wird also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\eta}^{+\eta} F(x, \varepsilon) dx = 1, \quad (17c)$$

für jedes endliche oder unendliche oder auch wie (22) gegen 0 gehende η . Die Gln. (17) für die Funktion F sind aber identisch mit den Gln. (6) für die Funktion G . Somit wird also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F[x, G(x+a, \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x, \varepsilon) = \delta(x). \quad (24)$$

Auf Grund von (14) folgt dann auch in ähnlicher Weise, daß

$$\lim_{\varepsilon=0} F[h(x), G(x+a, \varepsilon)] = \lim_{\varepsilon=0} F[h(x), \varepsilon] = \sum \frac{\delta(x-x_i)}{h(x_i)}. \quad (25)$$

Hiermit ist unter den gegebenen Bedingungen die Gültigkeit der Gl. (5) gezeigt, die wir aus physikalischen Gründen gefolgert haben.

IV. Anwendung

Eine bekannte Darstellung der Delta-Funktion durch Glockenkurven ist

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-(x/\varepsilon)^2}. \quad (26)$$

Eine andere solche Darstellung ist, wie von Pelzer und Gross gezeigt wurde,

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi \varepsilon}{\cosh x + \cos \pi (1-\varepsilon)}. \quad (27)$$

Mit

$$\eta(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\sigma}, \quad 1 > \delta > 0, \quad (28a)$$

wird

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\cosh(a - \varepsilon^{1-\sigma}) + \cos \pi (1-\varepsilon)}{\cosh(a + \varepsilon^{1-\sigma}) + \cos \pi (1-\varepsilon)} = 1, \quad (28b)$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^{1-\sigma}}{\sin \pi \varepsilon} [\cosh(a + \varepsilon^{1-\sigma}) + \cos \pi (1-\varepsilon)] = \infty. \quad (28c)$$

Die Bedingungen (22) sind also erfüllt, und man erhält für die Funktion (27) eine Beziehung, die sich formal schreiben läßt

$$\frac{1}{\delta(x+a) \sqrt{\pi}} e^{-[x/\delta(x+a)]^2} = \delta(x). \quad (29)$$

Die Funktion (27) hat nicht die Form (8). Sie kann aber in der Umgebung des Punktes $x=0$, $\varepsilon=0$, entwickelt werden, und die Entwicklung zeigt, daß sie in diesem Gebiet auf die Form (8) gebracht werden kann. Außerhalb des Nullpunktes sind die Funktionen für endliches ε überall endlich und gehen mit ε gegen 0. Die Integrale im Unendlichen konvergieren absolut. Unter solchen Bedingungen läßt sich ein dem obigen ähnlicher Beweis durchführen. Man schließt hieraus, daß die beiden Funktionen (26) und (27) vertauscht werden können, und hieraus folgt eine Beziehung, die sich formal schreiben läßt

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin [\pi \delta(x+a)]}{\cosh x + \cos \pi [1 - \delta(x+a)]} = \delta(x). \quad (30)$$

Herrn Professor Guido Beck ist Verfasser für zahlreiche Diskussionen und Anregungen sehr zu Dank verpflichtet.

Über die spektrale Empfindlichkeit eines Neutronenzählers mit Bremsmantel

Von GEORG PFOTZER

Aus der Forschungsstelle für Physik der Stratosphäre in der Max-Planck-Gesellschaft, Weissenau
(Z. Naturforschg. 6a, 679–688 [1951]; eingegangen am 15. Juli 1951)

Herrn Professor Erich Regener zum 70. Geburtstag

Es wird eine Methode für die Berechnung der spektralen Empfindlichkeit eines borhaltigen Neutronenzählers mit einem Bremsmantel aus Paraffin beschrieben. Die Empfindlichkeit ist bestimmt durch die energieabhängigen Verluste an schnellen Neutronen während des Bremsprozesses und die ebenfalls von der ursprünglichen Energie abhängige Quellenverteilung thermischer Neutronen. Der spektrale Meßbereich wird bei hohen Energien im wesentlichen durch die Bremsverluste, bei kleinen Energien durch die Rückdiffusion und den Einfang der thermisch gewordenen Neutronen beschnitten. Die einzelnen Abhängigkeiten können stufenweise erfaßt werden und erlauben eine Berechnung der spektralen Empfindlichkeit für verschiedene Abmessungen von Zählrohr und Bremsmantel.

Der spektrale Meßbereich von Neutronenzählern, deren Ansprechwahrscheinlichkeit der Neutronengeschwindigkeit v umgekehrt proportional ist, beschränkt sich bei mäßigen Intensitäten praktisch auf das Gebiet der langsamen, nahezu thermischen Neutronen. Zähler dieser Kategorie sind heutzutage fast

ausschließlich Geiger-Zähler mit borhaltigem Wandbelag oder mit einer BF_3 -Gasfüllung, die im Proportionalbereich betrieben werden und auf die α -Teilchen der $^{10}\text{B}(n, \alpha)^7\text{Li}$ -Reaktion ansprechen. Da solche Zähler besonders zuverlässig arbeiten, verwendet man sie auch zum Nachweis schneller Neutronen, indem