# 5 Funktionen zweier Veränderlicher

## Schnitte und Höhenlinien

5.1 a) $x$ konstant; dann ist auch $c := 2x - \frac{1}{4}x^2$ konstant. Damit ergibt sich $f_c(y) = y - \frac{1}{4}y^2 + c = -\frac{1}{4}(y^2 - 4y) + c = -\frac{1}{4}(y-2)^2 + 1 + c$.
Die Schnittfunktion bei konstantem $x$ ist also eine nach unten offene Parabel mit Scheitel $(y_S,\ z_S) = (2,\ c+1) = (2,\ \ -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 1)$.

b) $y$ konstant; dann ist auch $d := y - \frac{1}{4}y^2$ konstant. Damit ergibt sich $f_d(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 + d = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x) + d = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4 + d$.
Die Schnittfunktion bei konstantem $y$ ist also eine nach unten offene Parabel mit Scheitel $(x_S,\ z_S) = (4,\ d+4) = (4,\ \ -\frac{1}{4}y^2 + y + 4)$.

c) $z = f(x,y) \iff (x-4)^2 + (y-2)^2 = -4z + 20$.
Die Höhenlinien sind also konzentrische Kreise um $(4,\ 2)$ mit Radius $r = \sqrt{-4z+20}$. Speziell für $z = 0$ ist dieser Radius $r = \sqrt{20}$, für $z = 1$ ist $r = 4$, und für $z = 5$ ergibt sich mit $r = 0$ nur noch der Punkt $(4,\ 2)$ als Höhenlinie. Höhen $z > 5$ werden nicht erreicht.

5.2 $h = x_1^2 - x_2 + 2x_1 + 3 \iff x_2 = x_1^2 + 2x_1 + 3 - h = (x_1+1)^2 + 2 - h$

Die auf die $(x_1, x_2)$-Ebene projizierten Höhenlinien sind Einheitsparabeln mit Scheiteln $(-1,\ 2-h)$, je nach der Größe von $h$.