6 Vektorrechnung und analytische Geometrie

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

6.1 Gegeben sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind,

a) mittels Berechnung des Rangs der Matrix $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$,

b) mittels Berechnung der Determinante der Matrix $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

6.2 a) Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:
Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p$ linear abhängig, dann sind auch die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_p, \vec{a}_{p+1}, \ldots, \vec{a}_q$ für $q > p$ linear abhängig.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die entsprechende Aussage in a) für $q < p$ nicht gilt.

6.3 a) Zeigen Sie, dass folgende fünf Vektoren im $\mathbb{R}^5$ linear unabhängig sind.

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Nun sei noch zusätzlich der folgende Vektor $\vec{b}$ gegeben: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 12 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

Stellen Sie $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_i (i = 1, \cdots, 5)$ dar.

c) Bilden Sie aus den Vektoren $\vec{a}_i (i = 1, \cdots, 5)$ die Matrix A, indem Sie die Elemente von $\vec{a}_i$ als i-te Zeile nehmen. Sind die Spalten dieser Matrix linear abhängig oder linear unabhängig?