A Mathematische Grundlagen: lineare Algebra

Dieses Kapitel dient zur kurzen Auffrischung der linearen Algebra. Sie ist Grundlage für das Verständnis einiger mathematischer Verfahren, wie Fourier-Transformation, Wavelet-Transformation, Karhunen-Loève-Transformation und Singulärwertzerlegung, die in diesem Buch erläutert werden. Für eine tiefergehende Diskussion empfehlen wir gängige Lehrbücher, zum Beispiel [99], von dem Definitionen teilweise übernommen wurden.

A.1 Infimum, Supremum und kompakte Menge

Der Ausgangspunkt der beiden folgenden Begriffe ist das Konzept der Menge der reellen Zahlen, die wir mit $\mathbb{R}$ bezeichnen, das Konzept einer Untermenge $M \subset \mathbb{R}$.

Definition A.1

Obere und untere Schranke einer Untermenge $M \subset \mathbb{R}$

Es sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Dann heißt ein Element $a \in \mathbb{R}$ eine *obere* (*untere*) *Schranke* von M, wenn für alle $x \in M$ gilt: $x \leq a(x \geq a)$.

Definition A.2

Supremum und Infimum einer Untermenge $M \subset \mathbb{R}$

Ein Element $s \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* (*Infimum*) von M (in Zeichen: $s = \sup M$ ($s = \inf M$)), wenn es kleinste obere (größte untere) Schranke ist. Das heißt, das Element s ist genau dann das Supremum (Infimum) von M, wenn kein Element von M größer (kleiner) als s ist und wenn gleichzeitig zu jedem $x < s$ ($x > s$) ein $a \in M$ existiert mit $x < a$ ($x > a$).

Die Kompaktheit einer Menge basiert auf dem Konzept der konvergenten Folge und ist folgendermaßen definiert: