# 5. Rekursion

*„Hol Wasser, Henry!" „Ein Loch ist im Eimer." „So stopf es!" „Womit denn?" „Mit Stroh!" „Das Stroh ist zu lang." „So kürz es!" „Die Axt ist zu stumpf." „So schärf sie!" „Der Stein ist zu trocken." „So hol Wasser, Henry!"* .....

*(Populärer Schlager; Kurzfassung)*

## 5.1 Rekursive Funktionen

Wir wollen eine Funktion schreiben, die die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ einer gegebenen Zahl $a$ berechnet. Diese Funktion hat also die Spezifikation

**fct** *sqrt: real* $\rightarrow$ *real*
**spc** $sqrt(a) \equiv z$ :
  **pre** $a \geq 0$
  **post** $z * z =_\varepsilon a$ .

Dabei verwenden wir den Vergleich „$x =_\varepsilon y$", der $x$ und $y$ nicht genau auf Gleichheit prüft (was bei Gleitpunktzahlen wegen der Rundungsfehler hoffnungslos ist), sondern nur auf näherungsweise Gleichheit. Das heißt, „$x =_\varepsilon y$" ist wahr, wenn $x$ und $y$ sich nur noch höchstens um den Wert $\varepsilon$ unterscheiden.

Newton hat uns eine Methode gezeigt, um eine Nullstelle einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu berechnen (falls $f$ die notwendigen Voraussetzungen wie Differenzierbarkeit etc. erfüllt): Wir beginnen mit einem geeignet gewählten Startwert $x_0$ und berechnen davon ausgehend eine Folge weiterer Werte $x_1, x_2, \ldots$ nach folgender Vorschrift:

$$x_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{1}$$

Wir beenden das Verfahren, sobald zwei aufeinanderfolgende Werte „nahe genug" beisammen liegen. Sie stellen dann hinreichend gute Approximationen an die gesuchte Nullstelle dar.

Für die Berechnung von $\sqrt{a}$ müssen wir also eine Nullstelle der Funktion $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - a$ berechnen. Daraus ergibt sich aus (1) die spezielle Iterationsvorschrift

$$x_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} * \left(x_i + \frac{a}{x_i}\right) .$$