

ZUR BESTIMMUNG DES TANGENTIALEN ELASTIZITÄTSMODULS DICKWANDIGER BLUTGEFÄSSE

Y. Summa, R.D. Bauer, R. Busse, A. Schabert

Institut für Physiologie und Kardiologie der Universität Erlangen-Nürnberg, Erlangen/BRD

Die Wandelastizität ist eine für das hämodynamische Verhalten des Arterien-systems wichtige Größe. Sie wird durch drei Elastizitätsmoduln charakterisiert, den tangentialen Modul E_t , den longitudinalen Modul E_l und den radialen Modul E_r . Für die Druck-Volumen-Beziehung ist vor allem E_t von Bedeutung, dessen Berechnung im Fall dünnwandiger Arterien keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet jedoch für dickwandige Arterien mit erheblichen Problemen verbunden ist. Ein als zylindrisch angenommene Arterien-segment ist in Abb.1 dargestellt.

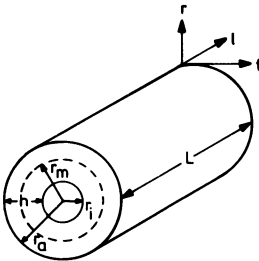


Abb.1. Segment einer dickwandigen Arterie der Länge L; r_i Innenradius, r_a Außenradius, $r_m = \sqrt{r_i \cdot r_a}$ Radius der mittleren Wandschicht; h Wanddicke; t, l, r drei zueinander orthogonale Richtungen.

Der Zusammenhang zwischen den relativen Dehnungen und den einwirkenden Kräften wird durch folgendes Gleichungssystem beschrieben:

$$\epsilon_i = \sum_j u_{ij} x_j \quad \text{mit } i, j = t, l, r \quad \text{und } u_{ii} = 1$$

$$\epsilon_t = \frac{dr_m}{r_m}, \quad \epsilon_l = \frac{dL}{L}, \quad \epsilon_r = \frac{dh}{h}$$

$$x_i = \frac{dK_i}{E_i q_i}, \quad u_{ij} = -\frac{\epsilon_i}{\epsilon_j} \quad (\text{für } i \neq j)$$

Hier bedeuten ϵ_i die relativen Dehnungen in tangentialer, longitudinaler und radialer Richtung, dK_i die in diesen Richtungen bei der Dehnung auftretenden Kraftänderungen, u_{ij} die 6 Poissonschen Zahlen für die in den senkrechten Richtungen auftretenden Querkontraktionen und q_i die Materialquerschnitte senkrecht zu K_i . E_i sind die Elastizitätsmoduln, von denen hier hauptsächlich derjenige in Tangentialrichtung (E_t) von Interesse ist. Für die dickwandige Arterie gilt wegen der Änderung der Kräfte in Radialrichtung diese Verknüpfung zwischen den relativen Dehnungen und den Kräften streng genommen nur für differentielle Volumenelemente. Diesem Umstand ist durch Mittelung der Kräfte über die Wanddicke Rechnung getragen. Weiterhin liegt diesem Gleichungssystem die Annahme zugrunde, daß die Arterienwand "orthotrop" ist, d.h. daß keine Scherungen auftreten.

Die relative Volumenänderung dV/V setzt sich additiv aus den relativen Dehnungen ϵ_i zusammen, wobei nach unserer Berechnung ϵ_t mit einem dimensionslosen Faktor λ multipliziert werden muß:

$$\frac{dV}{V} = \lambda \cdot \epsilon_t + \epsilon_l + \epsilon_r$$

$$\lambda = 2 \left(1 + \frac{h}{r_i} \right) \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{h}{r_i} \right)^2 \right]^{-1}$$

In Abb.2 ist λ als Funktion von h/r_i aufgetragen. Für kleine Werte von h/r_i unterscheidet sich λ nur sehr wenig von 1. Bei $h/r_i = 2,37$ ist λ auf 0,5 abgefallen.