Approximations- und Eindeutigkeitssatz für Exponentialsysteme mit komplexen Exponenten

Von *Jürgen Elsner* in Göttingen

---

1. Einleitung

In [4] und [5] werden spezielle Exponentialsysteme daraufhin untersucht, ob für sie ein Approximations- und Eindeutigkeitssatz gilt. Genauer werden nur solche Exponentialsysteme betrachtet, deren Exponenten nur reell oder rein imaginär sind. In dieser Arbeit können die Exponenten beliebig sein.

Ist Λ eine abzählbare Folge paarweise verschiedener komplexer Zahlen, dann nennen wir Λ ein *Exponentensystem* und $S := S(\Lambda) := (\exp[-2i\pi\lambda x])_{\lambda\in\Lambda}$ das dazugehörige *Exponentialsystem.* Es gilt $(A < \infty)$ $S \subset C(-A, A)$ und $S \subset L^p(-A, A)$ für $1 \leqq p < \infty$. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir $L^\infty(-A, A)$ anstelle von $C(-A, A)$ schreiben. Da $S \subset L^p(-A, A)$ ist, können wir den Abschluß der linearen Hülle von $S(\Lambda)$ in $L^p(-A, A)$ betrachten, den wir mit $H^p(\Lambda)$ bezeichnen. Wenn sich für ein festes p alle Funktionen aus $L^p(-A, A)$ durch Folgen (P_j) von trigonometrischen Polynomen $P_j \in H^p(\Lambda)$,

$$P_j(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} c_{\lambda,j} \exp[-2i\pi\lambda x],$$

approximieren lassen, d. h. $L^p(-A, A) = H^p(\Lambda)$, dann nennen wir $S(\Lambda)$ *total* in $L^p(-A, A)$. $S(\Lambda)$ heißt *frei* in $L^p(-A, A)$, wenn sich kein Element aus $S(\Lambda)$ in $L^p(-A, A)$ durch die übrigen approximieren läßt, d. h. für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt

$$\exp[-2i\pi\lambda x] \notin H^p(\Lambda - \{\lambda\}).$$

Ist $S(\Lambda)$ in $L^p(-A, A)$ sowohl total als auch frei, so nennen wir $S(\Lambda)$ eine *Basis* von $L^p(-A, A)$.

Ist $S(\Lambda)$ in $L^p(-A, A)$ frei, $f \in H^p(\Lambda)$ und (P_j) eine Folge von trigonometrischen Polynomen aus $H^p(\Lambda)$, die f approximiert, d. h. $f = \lim_j P_j$, dann existiert für alle $\lambda \in \Lambda$

$$\lim_j c_{\lambda,j} =: c_\lambda.$$

Die c_λ sind unabhängig von der approximierenden Folge eindeutig bestimmt (vgl. [1], [2]). Wir nennen c_λ die Entwicklungskoeffizienten von f bezüglich $S(\Lambda)$ und

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \exp[-2i\pi\lambda x]$$

die formale Entwicklung von f.