Ein Konvergenzsatz für eine gewisse Klasse kompakter Punktmengen

Von *Wolfgang Spiegel* in Berlin

Einleitung

Die Frage nach der Vollständigkeit gewisser Mengensysteme bezüglich der Hausdorffmetrik kann durch Anwendung des bekannten Auswahlsatzes für nichtleere, kompakte Punktmengen gelöst werden. Es wurden u. a. die Vollständigkeit der sternförmigen Mengen ([4]) und der m-konvexen Mengen ([2]) bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird ein entsprechender Satz für alle nichtleeren, kompakten Punktmengen A bewiesen, die die Eigenschaft haben, daß mit zwei Punkten x und y eine durch diese beiden Punkte definierte Menge $T(x, y)$ mit A gemeinsame Punkte hat. Punktmengen dieses Typs findet man bei Melzak ([5]).

1. Vorbereitende Tatsachen

Im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ bedeutet die aus einem Element A des Mengensystems $\mathfrak{X}$ der nichtleeren, kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konstruierte Menge

$$A_r = \bigcup_{x \in A} S(x; r) \tag{1. 1}$$

mit

$$S(x; r) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, \ \mid x - y \mid \leqq r\} \tag{1. 2}$$

die Außenmenge von A im Abstand r. Hier bezeichnet $\mid x - y \mid$ den euklidischen Abstand der beiden Punkte x und y. Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen wird $\mathfrak{X}$ durch

$$\mid A, B \mid = \inf \{r \mid A_r > B, \ B_r > A, \ r \geqq 0\} \tag{1. 3}$$

eine Metrik aufgeprägt (Hausdorffmetrik), die $\mathfrak{X}$ zu einem vollständigen metrischen Raum macht. Eine Funktion $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathfrak{X}$ soll dann stetig heißen, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} T(x_n, y_n) = T(x, y)$. Hierbei ist das Symbol „lim" in der letzten Gleichung im Sinne der Metrik (1. 3) zu verstehen.

2. Ein Konvergenzsatz

Definition. Ist $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathfrak{X}$ eine stetige Funktion, so soll $\mathfrak{X}_T < \mathfrak{X}$ das Mengensystem sein mit der Eigenschaft:

(2. 1) Für alle $A \in \mathfrak{X}_T$ und für alle $x, y \in A$ gilt $T(x, y) \cap A \neq \emptyset$,

d. h. $\mathfrak{X}_T = \{A \mid A \in \mathfrak{X}, \text{ für alle } x, y \in A \text{ gilt } T(x, y) \cap A \neq \emptyset\}$.