Die Verteilung der Primteiler von Polynomen auf Restklassen. I*)

Von *Volker Schulze* in Clausthal-Zellerfeld

Einleitung

Es sei $f(x)$ ein ganzzahliges Polynom aus dem Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ der ganzen rationalen Zahlen $\mathbb{Z}$ in einer Unbestimmten x. Eine Primzahl p heißt Primteiler von $f(x)$, wenn es ein $a \in \mathbb{Z}$ gibt mit $p \mid f(a)$. Unter der Primteilermenge

$$\mathfrak{P}_f = \{p : p \text{ Primzahl, es gibt ein } a \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \mid f(a)\}$$

von $f(x)$ verstehen wir die Menge aller Primteiler von $f(x)$.

Bekanntlich ist die Primteilermenge eines nichtkonstanten ganzzahligen Polynoms immer unendlich. Anzahl- und Verteilungsfragen von Primteilermengen behandeln eine Reihe von Arbeiten (Gerst und Brillhart [7], Grölz [8], Hasse [9], Hornfeck [11], Kronecker [12], Nagell [14], ferner [17], [18]; in Spezialfällen Ankeny und Rogers [1], Gassmann [5], Lewis und Schinzel und Zassenhaus [13], Nagell [15], Schinzel [16], Trost [19], Wegner [21]). Eine Vorstellung davon, wie groß der Anteil der Primteiler eines beliebig vorgegebenen ganzzahligen Polynoms in der Menge aller Primzahlen $\mathfrak{P}$ ist, vermittelt der folgende Zusammenhang.

Satz 1. *Mit G werde die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bezeichnet und mit H die Menge aller Automorphismen aus G, die mindestens eine Nullstelle von $f(x)$ festlassen. Dann besitzt die Primteilermenge $\mathfrak{P}_f$ in $\mathfrak{P}$ die natürliche Dichte d, deren Wert die relative Häufigkeit der Automorphismen von H in G angibt*; *d. h. es existiert der Grenzwert*

$$d = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{\substack{p\in\mathfrak{P}_f\\ p\leqq x}} 1}{\sum\limits_{\substack{p\in\mathfrak{P}\\ p\leqq x}} 1} = \frac{|H|}{|G|}.$$

Der Beweis ist ausgeführt in [18]. Er ergibt sich daraus, daß sich die Primteilermenge bis auf endlich viele Ausnahmen aus Mengen von Primzahlen (Tschebotareff-Mengen) zusammensetzt, die zu gewissen Artin-Symbolen des Zerfällungskörpers von $f(x)$ gehören, und daraus, daß diese Mengen in $\mathfrak{P}$ eine bestimmbare natürliche Dichte besitzen. Es handelt sich um diejenigen Artin-Symbole, deren zugehörige Automorphismen mindestens eine Nullstelle von $f(x)$ auf sich abbilden.

---

[1]) **Habilitationsschrift TU Clausthal 1973.**