Neuere Studien über Gitterpolygone

Von *H. Hadwiger* in Bern und *J. M. Wills* in Siegen

In der vorliegenden Note werden drei Sätze über die Anzahl der Gitterpunkte in Gitterpolygonen aufgestellt. Satz 1 bringt eine allgemeine Formel für die Gitterpunktanzahl, die einige klassische Ergebnisse umfaßt. Die Sätze 2 und 3 beziehen sich auf das Verhalten der Gitterpunktanzahl bei Translationen. Während in den einschlägigen bekannten Formeln die zulässigen Polygone noch gewissen Einschränkungen unterliegen, gelten die hier begründeten Sätze für beliebige kompakte Gitterpolygone. Das Auftreten der Eulerschen Charakteristik in einigen Formeln deutet auch auf den engen Zusammenhang zwischen Gitterpunktproblemen und kombinatorischer Geometrie hin.

Um die Unterschiede zu den klassischen Formeln klar erkennbar zu machen, ist es erforderlich, daß wir zunächst den unserer Studie zugrunde gelegten Polygonbegriff genau erläutern (vgl. dazu auch [6]). Eine kompakte Punktmenge $A < E^2$ der euklidischen Ebene heißt Polygon, wenn der Rand ∂A eine polygonale Linie I ist. Eine kompakte Punktmenge $I < E^2$ nennen wir polygonale Linie, wenn I eine disjunkte Zerlegung Z in endlich viele Punkte, genannt Eckpunkte, und endlich viele offene Strecken, genannt Kanten, so gestattet, daß die Endpunkte aller Kanten der Eckpunktsmenge angehören. Es ist zu beachten, daß I eine Punktmenge, (I, Z) dagegen ein ebener, endlicher, schlichter und geradliniger Graph ist, und daß I beliebig viele Zerlegungen Z erlaubt. Die Eckpunkte des Polygonrandes ∂A heißen auch Eckpunkte von A und die Kanten von ∂A sind die Randstrecken. Ecken und Randstrecken eines Polygons A sind demnach nicht durch die Punktmenge A schlechthin bestimmt, sondern bilden einen durch die Randzerlegung Z induzierten Komplex. Eine Randstrecke S von A heißt einseitig, wenn $S \cap \operatorname{cl} \operatorname{int} A = S$, zweiseitig, wenn $S \cap \operatorname{cl} \operatorname{int} A = \emptyset$ ausfällt. Hierbei bezeichnet $\operatorname{cl} \operatorname{int} A$ die abgeschlossene Hülle des offenen Kerns (Kernhülle) von A. Ein fester Punkt $o \in E^2$ sei Nullpunkt eines cartesischen Koordinatensystems. Ist $p \in E^2$ ein beliebiger Punkt oder sein in o angreifender Ortsvektor, so sollen $x(p)$, $y(p)$ seine Koordinaten anzeigen. Die Menge $Z^2 := \{p \mid x(p), y(p) \text{ ganzzahlig}\}$ ist das orthonormierte ebene Punktgitter. Ein Polygon, dessen Eckpunkte alle zu Z^2 gehören, heißt Gitterpolygon. Wir wollen noch voraussetzen, daß die Randzerlegung Z so gewählt worden sei, daß die auf dem Rand ∂A liegenden Gitterpunkte alles Eckpunkte sind, so daß keine Randstrecke Gitterpunkte enthält.

1. Im nachfolgenden ersten Abschnitt wenden wir uns Beziehungen zu, die zwischen der Gitterpunktzahl und passenden Maßzahlen eines Gitterpolygons bestehen.