# Ein binäres additives Problem

Von *Manfred Gottschalk* in Frankfurt am Main

*Professor Dr. Th. Schneider zum 65. Geburtstag gewidmet*

---

### 1. 1. Einleitung

C. Hooley bewies 1957 in [4] mit Hilfe der erweiterten Riemannschen Vermutung, daß es unendlich viele Primzahlen der Form

$$p = a + u^2 + v^2$$

($a$ fest ungleich Null vorgegeben, $u$, $v$ ganz) gibt. Linnik [6] löste 1960 dieses Problem ohne Zuhilfenahme einer unbewiesenen Vermutung. 1966 zeigten Elliott und Halberstam [3], daß im Beweis von Hooley die erweiterte Riemannsche Vermutung durch den Satz von Bombieri ersetzt werden kann. Basierend auf den Beweismethoden von [3] und [4] soll in dieser Arbeit die allgemeinere diophantische Gleichung

$$\begin{aligned} p &= a + d(u^2 + v^2) \\ p &\equiv b(K) \end{aligned} \tag{1. 1}$$

bei vorgegebenen $a \neq 0$, $d$, $b$, $K$ und $b \neq 0$, $(bd, K) = 1$, $(a, d) = 1$ behandelt werden.

### 1. 2. Bezeichnungen

$x_i$ $(i = 1, 2)$, $z$ und $n$ sind natürliche Zahlen, $n > e^e$, $p$ und $q$ sind Primzahlen, $\sigma(z) = \sum_{t \mid z} t$, $r(m) = \sum_{x^2 + y^2 = m} 1$. Die übrigen Bezeichnungen und Abkürzungen (insbesondere die Definition der Funktion $f$ und der Zahl $z^{(1)}$) sind der Arbeit von Hooley [4] entnommen.

### 2. 1. Formulierung der Sätze

**Satz 1.** *Zu vorgegebenem ganzen $a \neq 0$ und reellem $T > 0$ ist für alle natürlichen $K$ und $d$ mit $4 \nmid K$, $(d, 2Ka) = 1$, $Kd \leqq \log^T n$ und alle zu $K$ teilerfremden $b$*

$$\sum_{\substack{0 < p - a < n \\ p \equiv b(K) \\ p - a \equiv 0(d)}} r\left(\frac{p-a}{d}\right) = C(d, K, a) \frac{n}{\varphi(K)\,\varphi(d) \log n} + O\left(\beta(K) \frac{n}{d \log^{1+\delta} n}\right)$$